Ficha H. Polinomios S3

El teorema del resto

Cuando queremos saber el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre otro de la forma $(x-a)$ hay dos opciones: hacer la división euclídea (con caja), o usar el teorema del resto.
El **teorema del resto** dice que al dividir $P(x)$ entre $(x-a)$, el resto de la división es $P(a)$
Ejemplo: calcular el resto de la división $P(x) = x^2 - 2x + 1$ entre $(x+3)$
En este caso, $a = -3$ (para que cuadre con el enunciado), y el resto será $P(-3) = (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 1$, es decir $R = 16$ (puede comprobarse haciendo la división).

Factorizar polinomios

Paso 1: extraer factor común.	Ejemplo: $P(x) = 2x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 12x^2$ F.Común $2x^2$: $P(x) = 2x^2(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$
Paso 2: si el grado es mayor o igual a 3, usar Ruffini (o, si es bicuadrada, aplicar las técnicas apropiadas).	Aplicamos Ruffini. Usamos el teorema del resto para comprobar que sirve $x = 1$: $\begin{array}{c\|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$ Por tanto: $P(x) = 2x^2(x-1)(x^2 - x - 6)$
Paso 3: seguir reduciendo el grado hasta que sea 2. En ese momento, o bien es una igualdad notable, o bien se usa la fórmula de la ecuación de segundo grado.	Lo que queda no es una igualdad notable, así que aplicamos la fórmula: $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ Colocamos los valores como factores: $P(x) = 2x^2(x-1)(x+2)(x-3)$
Paso 4: escribir las raíces (valores que hacen que el polinomio valga cero), que se ven a simple vista en el polinomio factorizado.	A la vista del polinomio anterior, operando cada bloque por separado, las raíces son: $\begin{cases} x_1 = 0 \ (doble) \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Recuerda que si el coeficiente del término mayor no es 1, no es suficiente con escribir un factor por cada raíz. Por ejemplo:

$$P(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

Aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1/2 \end{cases}$$

La factorización de $P(x)$ no es $(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, pues si haces la operación, no conseguirás tener el $2x^2$.
La factorización correcta es:

$$P(x) = 2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right), \qquad raíces: \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ejercicios

1. Usa el teorema del resto para calcular el resto de la división de $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ entre:

$a)\ (x+1)$	
$b)\ (x-2)$	
$c)\ x$	

2. Determina el valor de a para que el polinomio $P(x) = 3x^2 - 2x + a$:

a) Sea divisible entre $(x-1)$	
b) Sea divisible entre $(x+2)$	
c) El resto de la división de $P(x)$ entre $(x+2)$ sea 3	
d) El resto de la división de $P(x)$ entre (x) sea 4.	

3. Calcula, sin hacer la operación, el resto de las siguientes divisiones:

$a)\ (3x^2 - x + 1) : (x-2)$	
$b)\ (2x^3 - x + 1) : (x+3)$	
$c)\ (42x^5 - 123x^4 + 47x^2 + 15x + 1) : x$	

4. Determinar el valor de a para que el polinomio $3x^2 - x + a$ para $x = 2$ sea 0.

5. Realiza las divisiones en las operaciones del ejercicio 3. Comprueba que el resto es el mismo.

6. Sin hacer la división, calcula k para que:

$a)$ $(kx^2 - 3x + 1):(x + 3)$ tenga resto 2.	
$b)$ $P(x) = 3x^3 - kx + 3$ sea divisible entre $x - 2$	

7. Factoriza los siguientes polinomios, e indica las raíces en cada caso:

$a)$ $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$	
$b)$ $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$	
$c)$ $P(x) = 2x^3 - 20x^2 + 48x$	
$d)$ $P(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$	
$e)$ $P(x) = 3x^4 + 3x^3 - 18x^2$	

$f)\ P(x) = 3x^2 + 9x$	
$g)\ P(x) = 20x^5 - 180x^3$	
$h)\ P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$	
$i)\ P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$	
$j)\ P(x) = x^4 - 16$	

Soluciones:

Ej1	a) 6	b) 3	c) 1	Ej2	$a)\ -1$	$b) -16$	$c) -13$	$d)\ 4$
Ej3	$a)\ 11$	$b) -50$	$c)\ 1$	Ej 4	$a = -4$	Ej5: hacer las divisiones		
Ej6	a) $-8/9$	b) $27/2$						

Ej7. Factorización	Raíces	Ej7. Factorización	Raíces
$a)\ x(x-2)(x+1)$	$\{-1,0,2\}$	$f)\ 3x(x+3)$	$\{-3,0\}$
$b)\ (x-3)(x-1)(x+1)$	$\{-1,1,3\}$	$g)\ 20x^3(x-3)(x+3)$	$\{-3, 0(triple), 3\}$
$c)\ 2x(x-6)(x-4)$	$\{0,4,6\}$	$h)\ (x-5)(x-2)^2$	$\{2\ (doble), 5\}$
$d)\ (x-1)(x+2)^2(x+3)$	$\{-3,-2\ (doble), 1\}$	$i)\ (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$	$\{-2,-1,1,2\}$
$e)\ 3x^2(x-2)(x+3)$	$\{-3, 0\ (doble), 2\}$	$j)\ (x-2)(x+2)(x^2+4)$	$\{-2,2\}$