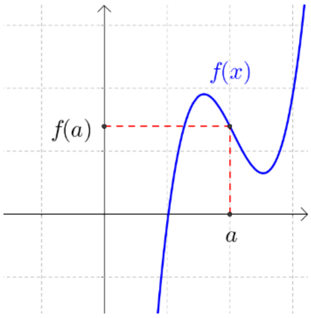
01. Límites y continuidad

1. Concepto de límite



Una función $f(x)$ es un objeto matemático [1]que asocia a cada **valor** de la **variable independiente** x un **único** valor de la imagen, **variable dependiente**, $f(x)$. En una función, x puede tomar, en principio, cualquier valor en el conjunto de los reales: $x \in \mathbb{R}$ (en este curso).

Así, por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ asocia a cada número su cuadrado. Por ejemplo, $f(2) = 4$ ó $f(-3.5) = 12.25$.

Una sucesión a_n es un objeto matemático que asigna a cada **posición** n el valor del término a_n. Aunque aparentemente es la misma idea que la función, aquí $n \in \mathbb{N}$, pues n representa el orden del elemento (primero, segundo, etc.).

Así, si tomamos la sucesión $a_n = n^2$, el término segundo será (como en las funciones), $a_2 = 4$. Sin embargo, no podemos calcular $a_{3.5}$ ni $a_{-3.5}$, pues no está definido el elemento que ocupa "el lugar 3.5".

Esto supone que el concepto de límite [2]sea diferente para una sucesión que para una función.

1.1. Límite de una sucesión

A medida que vamos calculando términos en una sucesión, llega un punto en que, quizá, la sucesión se "estabilice". En este caso se dice que la sucesión **converge** (es convergente). En caso contrario, la sucesión **diverge** (es divergente).

Por ejemplo, los términos de la sucesión $a_n = n^2$ son $a_n = \{1, 4, 9, 16, 25 \dots\}$. A medida que nos alejamos, el número va creciendo, y la sucesión es divergente.

Sin embargo, los términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ son $a_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots\right\}$. A medida que nos alejamos, el denominador crece y el número se hace cada vez más pequeño. Si calculamos el término "un millón", $a_{1000000}$, el resultado es un número extremadamente pequeño, aunque por mucho que avancemos, nunca conseguiremos exactamente cero. Sin embargo, cada vez nos acercamos más. Se dice que la sucesión **tiende a cero**, o que **el límite de la sucesión es cero**. Es una sucesión convergente:

$$\lim a_n = 0$$

Nótese que no es necesario especificar "límite cuando n tiende a…", pues al ser una sucesión sólo puede tender a infinito. **Los límites en las sucesiones siempre son en el infinito:**

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim a_n$$

La primera notación, en sucesiones, no se utiliza. En funciones sí.

[1] Ver la sección 1 de ampliación para una explicación detallada.
[2] Puedes ver el concepto de límite correctamente en la sección 2 de ampliación.

Existen sucesiones (y funciones) que no son ni convergentes ni divergentes. Por ejemplo, la función $f(x) = senx$, oscila eternamente entre 1 y -1.

1.2. Límite de una función en el infinito

En una función ocurre algo muy parecido. Una función puede tener límite cuando x tiende a infinito, aunque, al ser una función, introducimos un concepto nuevo: el límite cuando x tiende a "**menos infinito**" (un número muy grande pero negativo), concepto que, en principio, no se aplica a las sucesiones.

En este caso, la idea es similar a la anterior. Si tenemos $f(x) = x^2$, el límite en el infinito sigue siendo infinito (la función diverge). Y lo mismo ocurre en "menos infinito":

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)^2 = \infty$$

Que es el mismo resultado que antes para una sucesión convergente como $f(x) = \frac{1}{x}$. Es decir, lo mismo da sustituir x por un número muy grande positivo que negativo: el resultado será cero en ambos casos (si bien en el primero es un "cero positivo", que se suele representar por 0^+, y en el segundo un "cero negativo", 0^-)

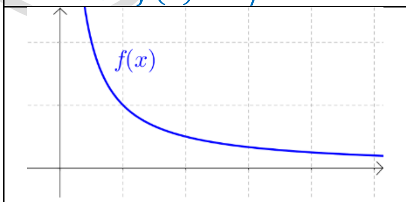
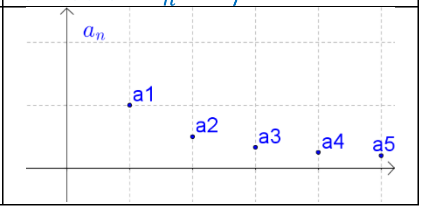
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$$

Sin embargo, veamos qué ocurre con una función como $f(x) = 2^x$. Cuando x toma valores muy grandes, la función tiende a infinito claramente. Sin embargo, cuando x toma valores muy grandes pero negativos (por ejemplo -1000000), ocurre lo siguiente:

$$2^{-1000000} = \frac{1}{2^{1000000}} \approx 0$$

Cuyo resultado es un número extremadamente pequeño. Podríamos decir que la función "converge" en $x \to -\infty$, pero diverge en $x \to +\infty$. Es por esto que **no suele usarse la terminología convergente/divergente para las funciones**. No obstante, sí se usa el límite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$$

Función $f(x) = 1/x$	Sucesión $a_n = 1/n$
	

1.3. Límites puntuales

Esta es la gran diferencia entre una función y una sucesión. ¿Qué pasa si me acerco a un cierto número todo lo que yo quiera, pero sin llegar a dicho número?

Esta simple idea es lo que se conoce como **límite puntual de una función**.

¿Por qué hay tanta diferencia en este caso entre función y sucesión? Cuando hablamos de límite de $f(x)$ cuando x tiende, por ejemplo, a 3, nos referimos a qué valor toma la función cuando x es prácticamente 3, pero sin llegar a 3. Es decir, cuando $x = 2.99$, cuando $x = 2.999$, cuando $x = 2.999999$, etc (o "por la derecha", es decir $3.1; 3.01; 3.0001 \ldots$). Sin embargo, en una sucesión, esto no ocurre, pues el concepto 2.999 no está definido. Si me alejo "un poco" de 3 por la izquierda, hay un "hueco" enorme (de una unidad) y luego está el 2. Y si lo hago por la derecha, el 4. Por eso **no existe el límite puntual de una sucesión**, pero sí el de una función:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Ej: analicemos el caso de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Determinemos, sin necesidad de operaciones, tres límites básicos: cuando la función tiende a infinito, cuando tiende a cero, y cuando tiende a 1.

Cuando tiende a infinito (no importa + o – infinito), el denominador se hace cada vez mayor (o menor en el menos infinito, pero igualmente muy grande) y, por tanto, la función tenderá a cero en el infinito. Al igual que antes, el cero del infinito positivo es positivo (para verlo, imagina que $x = 1000$), y el cero del menos infinito es negativo (imagina el valor de la función cuando $x = -1000$):

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0^{+} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^{-}$$

Ahora calcularemos el límite cuando $x \to 0$. En este caso, imaginando un número parecido a cero, como 0.00001 ó -0.001, vemos que no existe ningún problema de cálculo ni diferencia entre 0 y la proximidad de 0 y, simplemente, cuanto más nos acerquemos a cero más se aproximará el denominador a -1. Por tanto, en el límite:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Obviamente, no importa si nos acercamos a cero desde los positivos o desde los negativos. Esto es lo que llamaremos **límite regular**, que desembocará en el concepto de continuidad de una función.

Por último, calculamos qué ocurre en $x = 1$. Exactamente en $x = 1$ la función no existe, pues anula el denominador. Pero según nos acercamos a 1, el denominador será casi cero, pero no cero, y eso hará que la función tienda a números cada vez más altos (puede comprobarse con $x = 1.1; x = 1.01; x = 1.001$, etc, o su versión por la izquierda, con $x = 0.9; x = 0.99; x = 0.999$ etc)

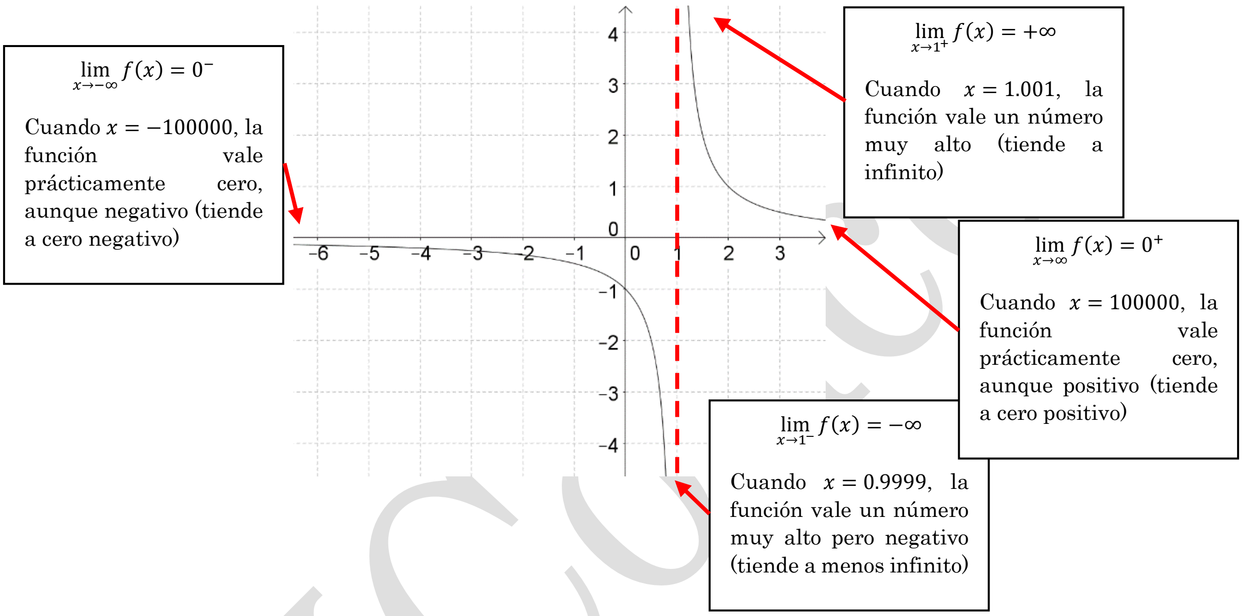
No obstante, aquí hay una diferencia importante. Si nos acercamos desde la izquierda (0.9; 0.99; 0.999), la diferencia entre $(0.9 - 1)$ o $(0.99 - 1)$, etc será siempre negativa. El denominador será muy pequeño, pero negativo. La función tiende, pues, a $-\infty$ cuando nos acercamos por la izquierda.

Sin embargo, por la derecha (con $x = 1.1; x = 1.01$, etc), la diferencia $(1.1 - 1)$, $(1.01 - 1)$, etc es muy pequeña pero positiva, por lo que al hacer la división el resultado será un número muy grande y positivo; en el límite, tenderá a infinito.

Esto es lo que se llaman **límites laterales**. Siempre que existan, tiene sentido distinguirlos, pero sólo en algunos casos (como este) son diferentes:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Podemos dibujar esta función para más claridad, y ver así el significado gráfico:



2. Cálculo de límites

Ahora bien, la cuestión está en ¿cómo se calcula un límite sin recurrir a ver qué ocurre aproximándonos sucesivamente? Debemos distinguir dos tipos de cálculos de límites: en el **infinito** y **puntuales** (se recomienda usar la ficha descargable en la página web).

2.1. Cálculo de límites en el infinito

a) Límites "pensando[3]"

Sin más que darle unos cuantos valores a la variable x, se ve fácilmente que una exponencial (a^x con $a > 1$) crece más rápido que una función potencial (x^n), que a su vez crece mucho más rápido que una función logarítmica ($\log x$). Por tanto, tenemos la siguiente comparación de crecimiento para x muy grandes:

$$\boxed{a^x \gg x^n \gg \log_a x}$$

Por tanto, los siguientes límites deberían ser triviales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + 1}{x^{10} - x^8 + x} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^{100} - x^{70} + x + 1)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{\log x} = \infty$$

Recuerda que esto es una generalización. Si $a \in (0,1)$, la exponencial es tanto más pequeña cuanto mayor es su argumento. Pero si $a > 1$, y el argumento es $1/x$, ocurre lo contrario, de forma que $a^{1/x}$ también es tanto más pequeña, cuando mayor es x. Lo mismo ocurre con los logaritmos, de forma que el cuadro anterior solo es válido con $a > 1$.

b) Límites de cocientes de polinomios $\left(\text{indeterminación } \frac{\infty}{\infty}\right)$

En este caso, no tenemos más que despreciar los términos "inferiores" y quedarnos con los mayores grados en numerador y denominador. Pueden darse tres casos:

- El grado del numerador es mayor que el del denominador: tiende a $\pm\infty$ (dependiendo del ejercicio puede ser + o -).
- El grado del numerador es menor que el del denominador: tiende a cero.
- Los grados son iguales: el resultado será el cociente entre los coeficientes de los mayores monomios.

Ahora bien, para ser correcto, deberíamos operar del siguiente modo: siempre que se produzca una indeterminación de este tipo, dividiremos numerador y denominador entre x^n, siendo n el grado mayor:

Ej: Calcula el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 3}$$

Dividiremos numerador y denominador entre x^2, el mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

[3] Por supuesto, esto no es lenguaje técnico. Pero, recuerda, esto son unos apuntes, no un libro.

Al sustituir x por ∞, toda división $\frac{a}{\infty} \to 0$, tiende a cero, quedando:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{0} = \infty$$

Habrá que ser cuidadosos a la hora de analizar que el resultado sea ∞ o $-\infty$, igual que si el límite tiende, como en este caso, a $+\infty$ o a $-\infty$, pero el procedimiento es el mismo en todos los casos (siempre se puede comprobar usando un valor razonablemente grande para x para determinar si tiende a $\pm\infty$). Esto no ocurre cuando tiende a un número cualquiera o a cero.

Cuidado: en algunos límites, usaremos esta técnica, pero no se trata de polinomios. Fíjate en el siguiente ejemplo:

Ej: calcula el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+3}$$

Si despreciamos, en las sumas, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

(Lo mismo ocurre dividiendo todo entre x). Nótese que el "grado" del numerador no es, estrictamente, 1, pues no es un polinomio, y las funciones no polinómicas no tienen grado. Ahora, es cierto que en infinito, se comporta como un polinomio de grado 1, por lo que usamos la misma técnica.

c) **Límites cuya indeterminación surge de $\infty - \infty$**

Dentro de estos límites distinguiremos dos casos: en que se vea claramente que uno de los infinitos es mayor que el otro, y en el que no. Dentro de este segundo tipo, distinguiremos aquellos límites que surjan de restas de fracciones algebraicas, y aquellos que surjan de raíces:

- **Ej: calcula el límite:**

  $$\lim_{x\to\infty} (2^x - x)$$

  Este es un caso de $\infty - \infty$, pero es tan superior 2^x frente a x si $x \to \infty$, que el resultado de este límite (que habría que incluir en la categoría "pensando"), es infinito trivialmente.

- **Ej: calcula el límite:**

  $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$$

  Nótese que este límite no es el infinito, pero consideramos oportuno, por cuestiones mecánicas, incluirlo aquí. Puede comprobarse fácilmente que este límite tiende a $\infty - \infty$, pues se anulan ambos denominadores.

  El proceso para resolverlo es tan sencillo como operar las fracciones y simplificar[4]:

[4] Ver la sección de ampliación para una explicación detallada.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x(x+1)-2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{x^2-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)=\frac{3}{2}$$

- **Ej: Sin embargo, el ejemplo habitual de esta indeterminación sería**[5]**:**
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-\sqrt{4x^2+x}\right)$$
Ambos infinitos son tan similares, que no resulta obvio cual es mayor, o si son ambos iguales. Para determinarlo, debemos extraer el contenido de las raíces. Para ello, **multiplicaremos y dividiremos por el conjugado**, que es la operación misma pero cambiada de signo:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-\sqrt{4x^2+x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-\sqrt{4x^2+x}\right)\cdot\frac{\sqrt{4x^2-x}+\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt{4x^2-x}+\sqrt{4x^2+x}}$$
De esta forma, conseguimos una igualdad notable en el numerador. En el denominador hay una suma, así que no supondrá problemas:
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2-x)-(4x^2+x)}{\sqrt{4x^2-x}+\sqrt{4x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{\sqrt{4x^2-x}+\sqrt{4x^2+x}}$$
Para finalizar el ejercicio, nótese que el mayor grado es x, pues el x^2 del denominador está dentro de una raíz (recordemos que no podemos llamarlo grado como tal, sino que **en infinito se comporta como un polinomio de ese grado**). Dividimos todo entre x, teniendo en cuenta que al introducir x dentro de la raíz "entrará" como x^2:
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}+\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$$
Anulando cualquier operación del tipo $\frac{1}{x^n}$, ya que con $x\to\infty$ esta división tiende a cero:
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

d) **Límite 1^∞.** Un tipo de indeterminación especial es 1^∞, que **no es 1**. Para estudiarla, debemos recordar que el número e se define como:
$$\boxed{e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$
Y, más en general, podemos definirlo como:
$$\boxed{e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}\qquad\text{siempre que}\quad\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty}$$

[5] El caso más obvio, que puede resultar irrelevante para un lector con prisas, es el estudio del límite siguiente: $\lim_{x\to\infty}[(x+1)-(x-1)]$
Este límite, ciertamente, queda $\infty-\infty$, y su resultado no es, como dice la intuición, cero. Si desarrollamos los paréntesis: $\lim_{x\to\infty}[x+1-x+1]=\lim_{x\to\infty}2=2$
Los infinitos son prácticamente iguales, pero uno es 2 unidades mayor que el otro.

Recordamos que el número e es un número irracional (no puede escribirse como la división entre dos enteros), del mismo estilo que π ó $\sqrt{2}$, cuyo valor aproximado es 2.71828 .... Cuando tengamos una indeterminación del tipo 1^∞, debemos intentar llevarla a la forma anterior.

Ej: Calcula el límite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)^x$$

Es obvio que el límite da como resultado 1^∞ (que no es 1). Vamos a intentar que se parezca al número e, **sin cambiar el resultado del límite, solo su forma**. Para ello notamos primero en el $1+$ del principio de la fórmula de e. Para introducir un $1+$ sin cambiar la función, añadiremos también un -1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x}{x^2-1}-1\right)^x$$

Ahora, operaremos el -1 para incluirlo en la fracción:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x}{x^2-1}-\frac{x^2-1}{x^2-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{x^2-1}\right)^x$$

El siguiente paso es notar que en la fracción de e, aparece $\frac{1}{f(x)}$. Por tanto, necesitamos un 1 en el numerador. Para ello, bajaremos el numerador a la parte de debajo del denominador (la división de una división es una multiplicación):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2x+1}}\right)^x$$

Ya sólo nos queda tener la misma función en la parte baja de la fracción que en el exponente. Para lograr esto, añadiremos la función exactamente como está en el exponente, pero multiplicando y dividiendo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2x+1}}\right)^{\frac{x^2-1}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{x^2-1}\cdot x}$$

Por último, acudiendo a las propiedades de las potencias, dejamos todo lo que nos sobra como un exponente (recuerda que $\left(a^b\right)^c=a^{b\cdot c}$):

$$\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2x+1}}\right)^{\frac{x^2-1}{2x+1}}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-1}\cdot x}$$

Es importante notar que los límites deben aparecer tanto en la "base" de la potencia, como en el exponente. Si no, tendríamos una x suelta, sin valor concreto, que no puede ser. Finalmente, vemos que todo lo que tenemos dentro del paréntesis es precisamente el número e. Por tanto:

$$e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-1}\cdot x}$$

Y sólo nos queda preocuparnos del límite del exponente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-1}\cdot x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2-1}=2$$

El resultado, finalmente, es que este límite tiende a e^2

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)^x=e^2}$$

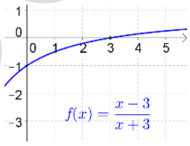
Aunque hay "fórmulas" para tratar este tipo de límites, se desaconsejan profundamente.

2.2. Límites puntuales

Cuando se calcula un límite puntual, pueden ocurrir varias cosas: que el resultado sea regular (primer caso), o que surja una indeterminación (que puede ser $\frac{k}{0},\frac{0}{0}$)

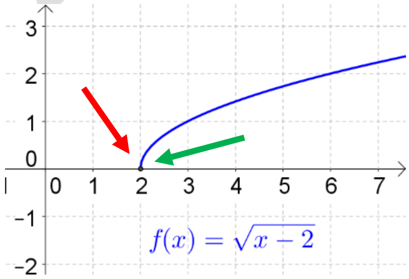
a) **Si el resultado es regular**, en principio no hay que añadir nada más.
Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x+3}=\frac{0}{6}=0 \qquad \lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=\sqrt{9}=3$$



Ahora bien, en algunos casos es importante notar que puede haber diferencias en los límites laterales.
Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=\sqrt{0^+}=0\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}=\sqrt{0^-}=\nexists\end{cases}$$

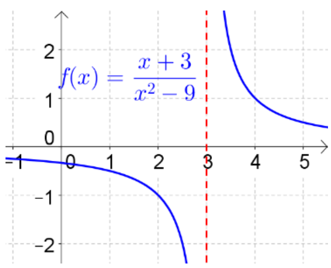


Nótese la razón: si $x=2.0001$ (flecha verde), al hacer la resta el resultado es positivo (y muy pequeño), y la raíz es cero. Si $x=1.99999$ (flecha roja), al hacer la resta el resultado es negativo, y la raíz no existe.

b) **Indeterminación $\frac{k}{0}$, donde $k\neq 0$**
Cuando surja esta indeterminación, ya sabemos de antemano que el resultado será ∞. La duda es si será $+\infty$ ó $-\infty$. Habrá que estudiar los límites laterales. En el caso de fracciones de polinomios, convendrá factorizar y simplificar:
Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{6}{0}\ IND\ \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$$



Ahora, analizamos los laterales:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty \qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty$$

Se dice que **el límite no existe**, ya que los límites son distintos (existen los laterales, pero no "el" límite). Si fuesen iguales, sí existiría dicho límite.
Basta comprobar con 2.99 y 3.01 para saber el signo del infinito. La factorización no es necesaria, aunque sí facilita los cálculos.

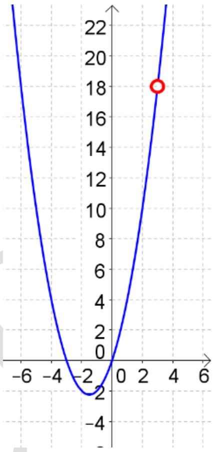
c) **Indeterminación $\frac{0}{0}$**

Este tipo de indeterminación, en principio, se resuelve factorizando y simplificando. Es importante hacer notar que, una vez resuelta esta indeterminación, puede aparecer de nuevo $\frac{0}{0}$ o la indeterminación $\frac{k}{0}$.

Ej: calcula el límite

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{x-3}=\frac{0}{0}\quad IND$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x(x+3)=18$$



Puede verse en la gráfica [6] de la derecha como la función es una parábola en todos los puntos (concretamente la parábola $x(x+3)=x^2+3x$), salvo en $x=3$, donde no existe. En efecto, la simplificación hecha anteriormente puede hacerse en cualquier punto salvo en $x=3$ (puesto que en $x=3$ queda una indeterminación $\frac{0}{0}$)

Veamos un caso en que hay que continuar:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x}{x^3+9x}$$

Al factorizar numerador y denominador tenemos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x(x+3)}{x(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$$

Que es el mismo ejemplo que el del apartado b, del tipo $\frac{k}{0}$.

Ej: calcula el límite

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-\sqrt{x-12}}$$

Este límite es muy interesante, ya que, aunque posiblemente intentarás técnicas como las del siguiente ejemplo, es un límite que NO SE PUEDE HACER. Piensa un poco por qué.

Ej: calcula este límite (este sí):

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-\sqrt{12-x}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-\sqrt{12-x}}\cdot\frac{x+\sqrt{12-x}}{x+\sqrt{12-x}}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x\sqrt{12-x}-3x-3\sqrt{12-x}}{x^2-(12-x)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2}{x^2-12+x}=1$$

[6] Es muy interesante probar a dibujar la función $\frac{x^3-9x}{x-3}$ en cualquier graficador como geogebra. Lo primero que salta a la vista, es que es, a todas luces, una parábola. Pero no lo es, porque le falta un punto. Ahora, nunca verás ese punto en un graficador, pues **un punto tiene tamaño cero**. ¿Sabrías buscar una estrategia para mostrar a tus alumnos esta discontinuidad en el graficador? Sugerencia: prueba con un deslizador.

3. Continuidad

3.1. Definición de continuidad

En cursos más bajos, se dice que una función es continua cuando "podemos dibujar la función sin levantar el lápiz del papel", o bien "cuando una hormiga puede caminar por la función". En este curso, debemos definir más correctamente la continuidad [7]en un punto a de una función $f(x)$.

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un punto a si se cumple que:

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)}$$

Traducido en palabras, quiere decir que la función tome el mismo valor si me acerco por la derecha o por la izquierda, o si me sitúo exactamente en el punto en cuestión.

Podemos imaginar la situación como el suelo de una casa (en rojo), que representa el límite por la izquierda, el sitio de la puerta (en azul), que representa $f(a)$, y el suelo de la calle (en verde), que representa el límite por la derecha. Para que podamos caminar "regularmente" desde la casa hasta la calle, más vale que los tres estén a la misma altura:

Es habitual utilizar funciones definidas a trozos para este tipo de ejercicios, pues con funciones usuales las operaciones son triviales:

Ej: determina en qué puntos es continua $f(x) = \frac{1}{x-3}$

Directamente, la función no es continua[8] en $x = 3$, porque no existe $f(3)$ (no haría falta siquiera comprobar los límites laterales).

La función es continua, pues, en $\mathbb{R} - \{3\}$

Ej: determina en qué puntos es continua $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x < 3 \\ x^2 - 1 & x \geq 3 \end{cases}$

En esta función, vemos que no presenta problemas en todo el intervalo por debajo de 3 (es una recta), ni por encima de 3 (es una parábola). (NOTA: este tipo de comentarios es muy importante que queden indicados, y cuanto más técnico, mejor, no como hago aquí en los apuntes). Por tanto, el único problema puede presentarse en $x = 3$. Estudiaremos la continuidad en este punto:

[7] La definición formal de continuidad tampoco es la que presentamos aquí, y tiene mucho que ver con la definición de límite $\varepsilon - \delta$ que mostramos en la sección de ampliación.

[8] En realidad, lo correcto es decir que la función **sí es continua**, pero solo en su dominio (en $x = 3$ no tiene sentido preguntarse por la continuidad). Pero mejor ver la sección correspondiente de ampliación.

$$\begin{cases} f(3) = 3^2 - 1 = 8 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (3x+1) = 10 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x^2-1) = 8 \end{cases}$$

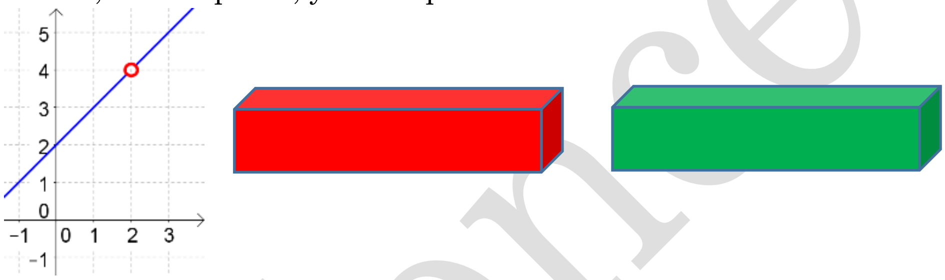
Como los límites y $f(3)$ no coinciden, la función no es continua en $x = 3$. Falta ver el tipo de discontinuidad.

3.2. Tipos de discontinuidades

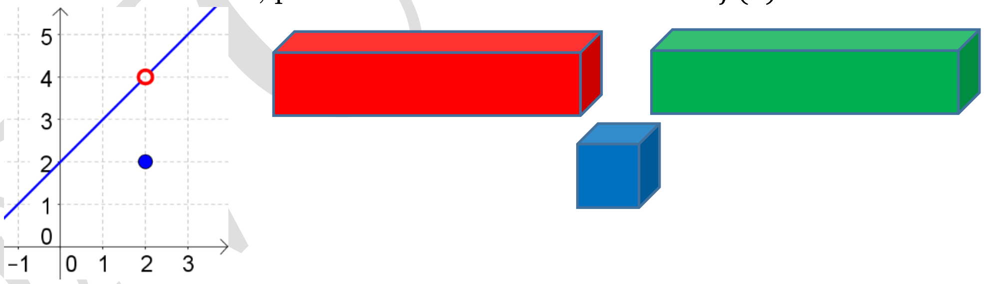
Una función puede ser discontinua en un punto por diferentes causas:

a) Discontinuidad evitable

   a. No existe $f(a)$, pero los límites laterales coinciden. O lo que es lo mismo, falta el punto, y sólo el punto[9].

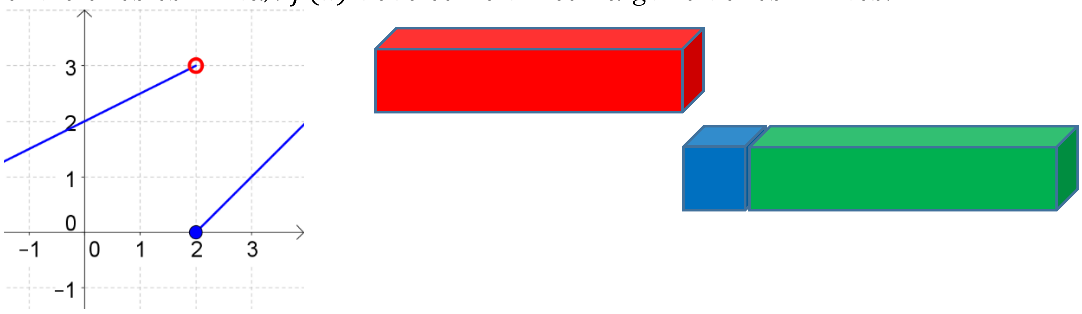


   b. $f(a)$ existe, pero no coincide con los límites. A este tipo de discontinuidad también se le llama de **punto desplazado**. Los límites laterales coinciden, pero no coinciden con el valor de $f(a)$.



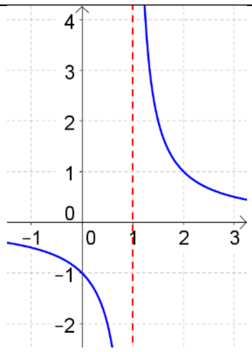
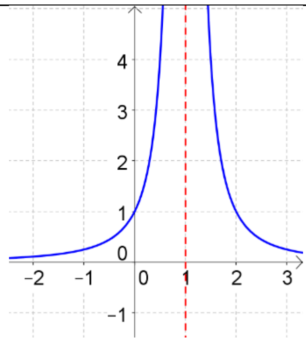
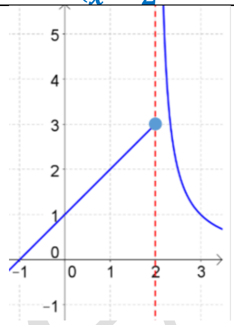
b) Discontinuidad de primera especie

   a. De salto finito. El límite por un lado y por otro no coinciden, pero ambos dan como resultado resultados finitos (por tanto, la distancia entre ellos es finita). $f(a)$ debe coincidir con alguno de los límites.



[9] Este es el tipo de función que, dibujada, no se ve su discontinuidad. Prueba a dibujar la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ y verás que queda una "recta" como la del dibujo. Pero le falta un punto.

b. De salto infinito[10]. Los límites laterales no coinciden, pero uno de los dos o ambos tienden a $\pm\infty$, lo que hace que el "salto" entre tender por la izquierda y por la derecha sea infinito.

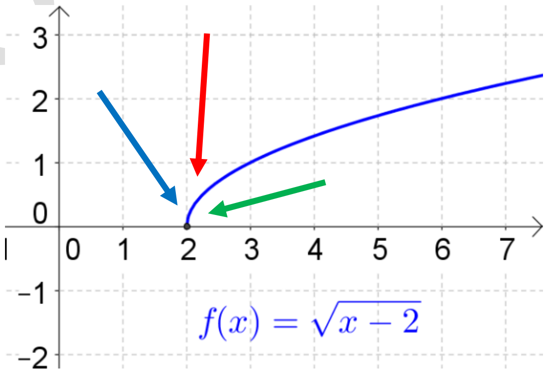
$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$	$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$	$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x > 2 \end{cases}$
		

c) <u>Discontinuidades esenciales o de segunda especie</u>
Se producen cuando no existe alguno de los límites laterales[11].
<u>**Ej:**</u>

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

Si calculamos límites y función en el punto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \nexists \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$



[10] Como decíamos antes, y tienes en la sección de ampliación, técnicamente solo tiene sentido preguntarse por la continuidad **si la función existe**. Así, la única discontinuidad de salto infinito en los tres ejemplos, es la tercera. Las demás son continuas (en su dominio).
[11] Lo mismo que antes. Estrictamente, la función dibujada, $f(x) = \sqrt{x}$, es continua (en su dominio). No obstante, aquí SÍ tiene sentido preguntarse por la continuidad de la función, así que este ejemplo sí es correcto.

4. Teoremas de continuidad: Bolzano, Darboux y Weierstrass

En matemáticas es muy usual utilizar teoremas, que son como los ladrillos sobre los que construir teorías[12]. Un teorema es algo que ha quedado demostrado (a veces las demostraciones pueden llevar muchas páginas, otras apenas un par de líneas[13]), y suelen componerse de elementos bien determinados:

- Condiciones: qué debe cumplirse para aplicar el teorema (por ejemplo, en el teorema de Pitágoras, la única condición es tener un triángulo rectángulo).
- Teorema: si se cumplen las condiciones, puede aplicarse el teorema (en el teorema de Pitágoras, si se cumple la condición, se cumple siempre que $h^2 = c_1^2 + c_2^2$).

En este curso vamos a ver **tres teoremas importantes** sobre continuidad de funciones que, si bien en algún caso pueden resultar de sentido común, deben ser analizados y utilizados con el rigor matemático necesario.

Si quieres ver un vídeo donde se explica perfectamente qué es un teorema (en clave de humor, pero interesantísimo), te recomiendo que veas esta charla TED de Eduardo Sáez de Cabezón (Derivando):

4.1. Teorema de Bolzano

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$
Si $sgn[f(a)] \neq sgn[f(b)]$
ENTONCES
existe al menos un cierto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$ (una raíz)

Donde $sgn(x)$ indica el signo de $f(x)$ (positivo o negativo). Nótese también que no dice el número de raíces que existen, solo dice "al menos una".

Lo que dice el teorema de Bolzano es lo siguiente. Primero, pedimos que la función sea **continua**, al menos en el intervalo $[a,b]$ que estamos analizando[14]. Una vez

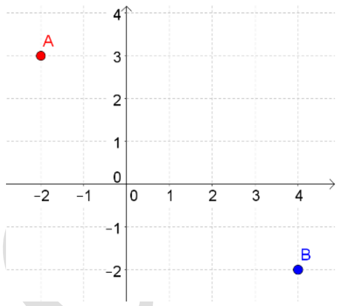
[12] Siempre en base a unos axiomas, que son proposiciones desde la que hay que partir. Por ejemplo, el axioma de que existen los números. Este es el punto en que la Matemática se toca con la Filosofía.
[13] No es frecuente demostrar teoremas en secundaria, pero se debería. En la sección correspondiente, te ofrezco un par de demostraciones sencillas.
[14] El teorema de Bolzano puede extenderse al infinito, solo que entonces tendríamos intervalo abierto, por ejemplo $[a,\infty)$, y en la definición habría que cambiar $sgn(f(b))$ por:

cumplido esto, si el signo cambia entre un punto y el otro, será porque ha pasado por el eje de abscisas (las x) en algún momento (existe una raíz).

Imaginemos que $f(a)$ es positivo (por encima del eje x), y $f(b)$ es negativo (por debajo). Entonces, **si la función es continua**, obligatoriamente, deberá pasar a través del eje x para unir el primer punto y el segundo, es decir, existe **al menos** una raíz.

Se pide que la función sea continua en el intervalo pues, si no lo es, la función podría pasar de positiva a negativa sin pasar por el eje (por ejemplo, a través de una discontinuidad de salto finito o una asíntota vertical).

Una prueba de esto (que no una demostración), es la siguiente: dibuja en un papel unos ejes cartesianos. Dibuja un punto en la parte izquierda arriba (segundo cuadrante, x negativas, y positivas, en rojo), y otro punto en la parte inferior derecha (cuarto cuadrante, x positivas e y negativas, en azul). Imagina una función continua (al menos en ese intervalo), que una los dos puntos[15].



Da igual lo que haga la función y cómo la dibujes. Obligatoriamente deberá pasar al menos una vez atravesando el eje de las x (aunque puede atravesarlo dos, tres o cien veces; el teorema garantiza que al menos una vez). Ahora que lo has entendido, trata de entender el chiste de la derecha.

La cuestión está en dónde aplicar este teorema. Veamos el siguiente ejemplo.

Ej: Sea la función $f(x) = x^2 - 4$ en el intervalo $[0, 3]$. Demuestra que existe una raíz en este intervalo.

En este caso, no sería necesario aplicar Bolzano. Podemos directamente imponer que la función se anule, y despejar:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Efectivamente, hemos encontrado que en $x = 2$ (que está en nuestro intervalo), hay una raíz.

Pero ¿cómo se haría utilizando Bolzano?

Para empezar, hay que demostrar que se puede aplicar el teorema. Para ello, se requieren dos condiciones: que la función sea continua (al menos en el intervalo), y que el signo de $f(a)$ sea distinto que el de $f(b)$.

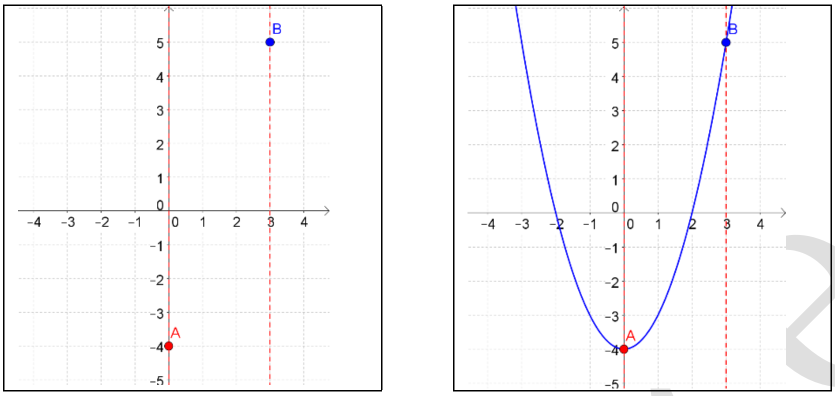
$$sgn\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)$$

Un poco más complicado, pero la misma idea. Lo mismo sirve para otros intervalos abiertos.

[15] ¿Recuerdas que una función no puede tener dos puntos en vertical, no? (técnicamente, no puede existir $a \neq b$ tal que $f(a) = f(b)$)

La primera condición se cumple, pues es una parábola (que es continua no sólo en el intervalo pedido, sino en todos los reales). Para la segunda condición, calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo pedido [0,3]:

$$\begin{cases} f(0) = 0^2 - 4 = -4 < 0 \\ f(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0 \end{cases}$$



Como los signos son distintos, podemos garantizar que entre 0 y 3 esta función tiene una raíz.

Fíjate como el teorema garantiza la existencia de al menos una raíz, pero no dice cómo calcularla, ni cuántas tiene. Este es el problema del siguiente ejemplo:

Ej: demuestra que $\boldsymbol{f(x) = 3 - \log x - 2^x}$ tiene una raíz en el intervalo $[\mathbf{1}, \mathbf{10}]$

Si intentásemos despejar como antes, nos encontraríamos con la siguiente ecuación[16]:

$$3 - \log x - 2^x = 0 \Rightarrow 3 - \log x = 2^x \quad ¿?$$

Así pues, no podemos determinar para qué valor de x la función se anula (no podemos buscar las raíces). Pero sí podemos demostrar que al menos tiene una.

Para empezar, tenemos que mostrar que la función es continua, al menos en el intervalo. 3 y 2^x son funciones continuas en todos los reales. No es así con el logaritmo, que sólo acepta números positivos. No obstante, como el intervalo es [1,10], todos ellos números positivos, **la función no es continua, pero sí lo es en el intervalo**, y como las operaciones de suma y resta son continuas, puedo aplicar el teorema. El siguiente paso es que los signos en los extremos sean distintos:

$$\begin{cases} f(1) = 3 - \log 1 - 2^1 = 1 > 0 \\ f(10) = 3 - \log 10 - 2^{10} < 0 \end{cases}$$

Nótese como en el segundo caso, ni siquiera hemos realizado la operación, dado que no es necesario.

[16] Estas ecuaciones se llaman **trascendentes**, que significa que no pueden resolverse con métodos algebraicos, es decir, no pueden resolverse con papel y bolígrafo (es decir, no pueden resolverse con las operaciones habituales de suma, resta, etc, en un número finito de pasos (es decir, y ya paro, **no pueden resolverse por radicales** (busca qué significa esto))).

Dado que la función es continua (al menos en el intervalo), y los signos son diferentes en cada valor de los extremos del intervalo, podemos garantizar que existe un valor $x = c$ tal que $f(c) = 0$ (es decir, existe una raíz $x = c$ en algún valor dentro del intervalo). No obstante, no podemos calcular analíticamente dicho valor[17].

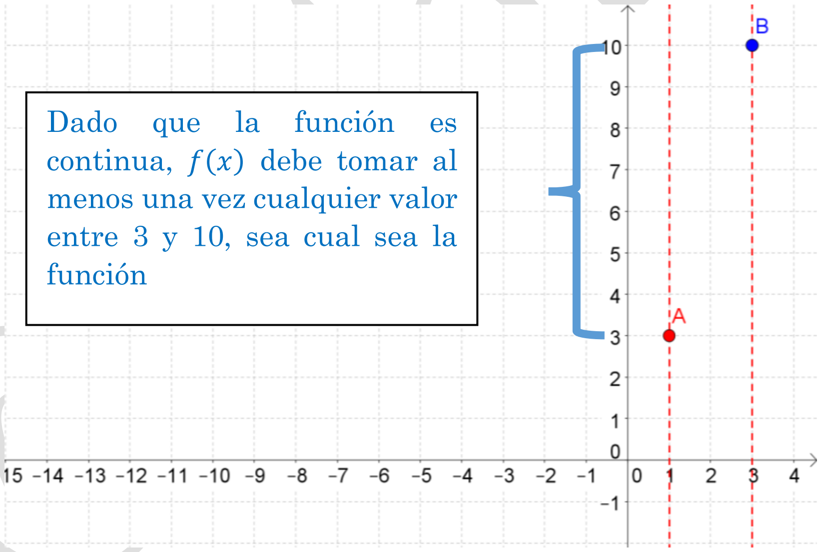
Además de la nota anterior, ¿sabrías resolver el problema aproximado dibujando las funciones?

4.2. Teorema de los valores intermedios de Darboux

El teorema o propiedad de Darboux afirma que:

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ Si k es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ ENTONCES existe un cierto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$

El teorema de Darboux es una generalización del teorema de Bolzano (de hecho, Bolzano es un caso particular de este teorema). Bolzano dice que si $f(a)$ es positivo y $f(b)$ negativo, por obligación pasamos por el cero. Darboux amplía, y dice que si, por ejemplo, $f(a) = 3$ y $f(b) = 10$, entonces la función pasará por todos los valores comprendidos entre 3 y 10 (recuerda, si es continua, y no dice cuántas veces).



Veamos un ejemplo, de nuevo con un problema calculable analíticamente y uno que no:

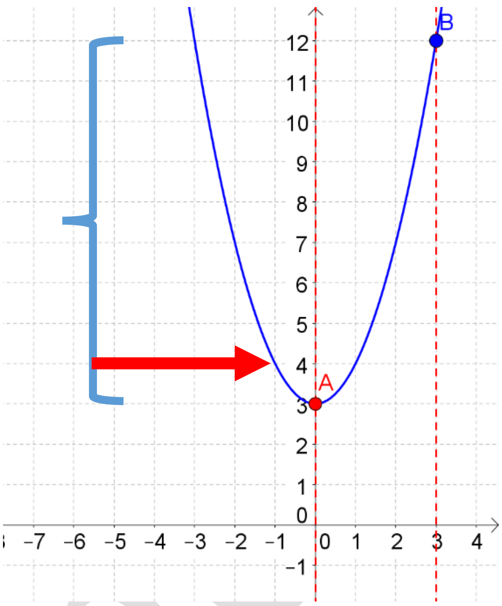
[17] Lo que sí puede hacerse es aproximar, que es lo que se conoce como **cálculo numérico**. Y otras técnicas de las que no hablaremos aquí. Ya sabemos el signo de la función en 1 (+) y en 10(-).
Probemos en $x = 5$: $f(5) = -29.699$. Por tanto, ya que es negativo, ya sabemos que la raíz estará entre 1 y 5, puesto que en 1 es positivo y en 5 es negativo (por Bolzano) Afinemos más: para $x = 2$ $f(2) = -1.301$, también negativo. Como $f(1) > 0$, la raíz estará entre 1 y 2. (sigue) De este modo, podemos ir afinando todo lo que queramos, hasta dar con un valor aproximado que, finalmente, resulta ser aproximadamente $x = 1.4868$ …

Ej: Demuestra que la función $f(x) = x^2 + 3$ toma el valor 4 en algún punto en el intervalo $[0, 3]$.

De nuevo, no es necesario Darboux para esto. Basta con igualar y calcular:

$$x^2 + 3 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Existe dicho valor, pues $x = 1$ está en nuestro intervalo [0,3] (hay otro, pero fuera del intervalo)



Ahora bien, aplicando Darboux procedemos de la siguiente forma:

Primero, ver que se puede aplicar el teorema. Pide que la función sea continua, que lo es, dado que es una parábola (no sólo es continua en el intervalo sino en todos los reales).

Ahora falta comprobar que nuestro k, en este caso $k = 4$, esté comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$:

$$f(0) = 0^2 + 3 = 3$$
$$f(3) = 3^2 + 3 = 12$$

Como 4 está comprendido entre 3 y 12, podemos utilizar el teorema de Darboux, que dice simplemente que existirá algún valor c (no dice cuántos) tal que $f(c) = 4$ (que previamente ya hemos calculado, y ya sabemos que $c = 1$, viendo que $f(1) = 4$).

De nuevo, Darboux sólo garantiza que existe, no precisa cuál es ni cuántos.

Ej: Demuestra que la función $f(x) = x^2 senx$ toma el valor 2 en algún punto en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Primero comprobamos que la función es continua, que en este caso lo es, dado que x^2 y $senx$ son funciones continuas, y el producto es una operación continua. No sólo lo es en el intervalo indicado, sino en todos los reales, pero aquí eso no nos preocupa.

Calculamos los valores extremos:

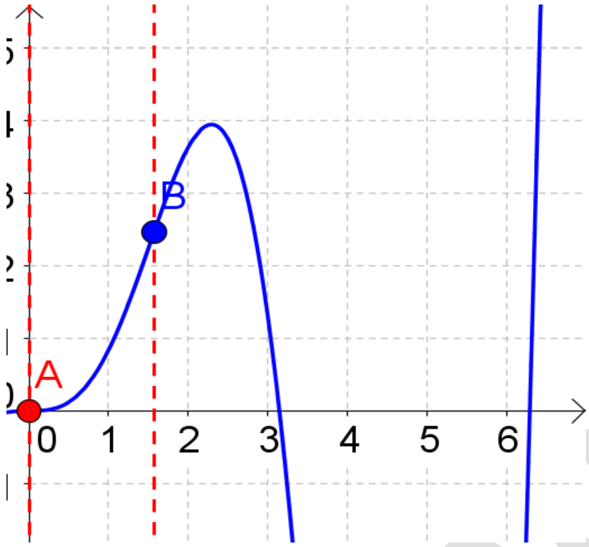
$$f(0) = 0^2 \cdot sen0 = 0$$
$$f(\pi) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \cong 2.46$$

Como el objetivo es demostrar que algún valor de x, digamos $x = c$, hace $f(c) = 2$, al ver que al comienzo del intervalo la función vale 0 y al final vale 2.46, tiene que existir entre medias algún valor que haga que $f(c) = 2$ (2 está entre medias de 0 y 2.46).

Ahora bien, de nuevo es imposible despejar con métodos analíticos x en la ecuación:

$$x^2 senx = 2$$

El valor aproximado para el que se cumple es $x \cong 1.4185$, que puede calcularse con métodos numéricos, o dibujando la función (no es competencia de este curso el cálculo con precisión de este valor):

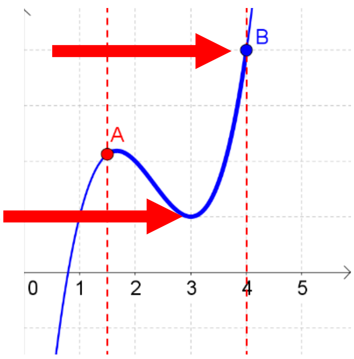


4.3. Teorema de Weierstrass

Al igual que antes, se define el teorema de Weierstrass como sigue:

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ ENTONCES $f(x)$ alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo.

La explicación es ciertamente lógica. Imaginemos que $f(a)=0$ y $f(b)=10$. La forma más sencilla de llegar desde a a b sería una línea recta. En ese caso habría un mínimo absoluto, el punto a, y un máximo, el punto b.



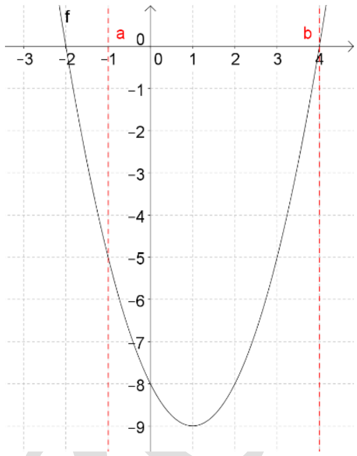
La segunda forma más fácil es haciendo algún tipo de curva. En este caso, de nuevo se forma un máximo y un mínimo. Si la curva es más compleja, se formarán más máximos y mínimos. Pero uno de ellos debe ser el mayor y otro el menor o, al menos, lo serán los valores extremos, garantizando que existe un **máximo absoluto** y un **mínimo absoluto**.

Nuevamente, el teorema no indica dónde están dicho máximo y mínimo. Sólo garantiza que existen. En algún caso se podrá calcular analíticamente, pero esto no tiene por qué ocurrir.

A este teorema le daremos de nuevo forma cuando veamos cómo calcular máximos y mínimos haciendo uso de las derivadas. Por ahora, nos conformaremos con el siguiente tipo de ejercicio:

Ej: dibuja la función $f(x) = x^2 - 2x - 8$. Utiliza primero el teorema de Weierstrass para determinar que existe un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 4]$. Después, a partir de la gráfica, determina qué punto es cada uno.

La función es continua en el intervalo (de hecho, lo es en todos los reales) por ser una parábola. Por tanto, el teorema de Weierstrass afirma que existe al menos un máximo y un mínimo absoluto en dicho intervalo.



A la vista del dibujo de la función (delimitada con líneas rojas marcando el intervalo), vemos claramente que el mínimo absoluto es el mínimo de la parábola, el punto $m(1, -9)$, y el máximo absoluto de la función coincide en este caso con el extremo superior, el punto $M(4,0)$:

5. Ampliación

En esta sección, completaremos algunas de las cosas anteriores, que hemos pasado por alto durante el texto o que hemos definido de forma demasiado laxa.

Sección 1. Funciones en varias variables

Dijimos que una función es un objeto matemático que asocia a valores de la variable independiente con valores de la variable dependiente. Esto, en general, no tiene por qué ser así. Una función asocia cualquier objeto, o conjunto de objetos, con otro objeto, o conjunto de objetos. Por ejemplo, podemos asociar los colores con la longitud de onda asociada. Así, por ejemplo:

$$f(rojo) = 750nm$$

No obstante, una función puede tener varios argumentos (varias variables independientes). Sin ir más lejos, podemos construir funciones del tipo:

$$f(x,y) = xy^2$$

De forma que, para $x = 3$ y $y = 5$, esta función toma el valor $f(3,5) = 3 \cdot 5^2 = 75$.

Ahora bien, también podemos construir funciones que trabajen en otros espacios distintos. Así, por ejemplo, imaginemos:

$$f(x,y) = (xy^2, x+y, x)$$

Tomando de nuevo el par (3,5), esta función asocia a estos dos valores con un vector tridimensional:

$$f(3,5) = (75,8,3)$$

La notación para escribir esta última función, por ejemplo, sería:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,y,z) \end{array}$$

Haciendo explícito que partimos de puntos de $\mathbb{R}^2$ (el plano), hasta puntos de $\mathbb{R}^3$ (el espacio). ¿Sabrías cómo dibujar estas dos últimas funciones?

Sección 2. Continuidad

Pues sí, como imaginarás, lo que hacemos aquí tampoco es correcto. Para estudiar si una función tiene, o no, límite, la definición es la siguiente:

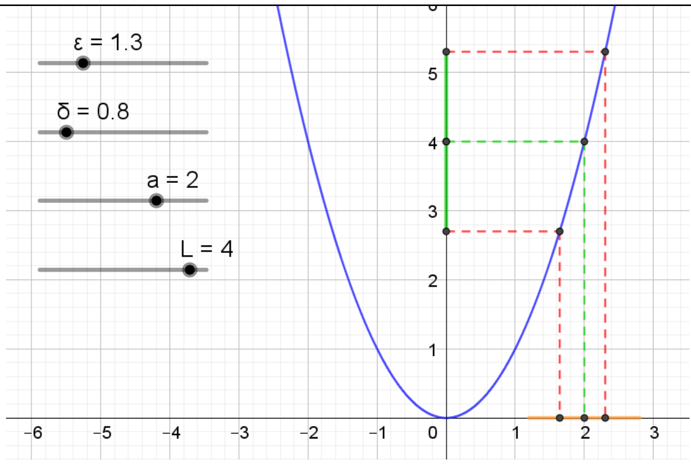
Dada una función $f(x)$, se dice que tiene límite L en un punto $x = a$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid si \ |x-a| < \delta \ entonces \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

En este caso:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

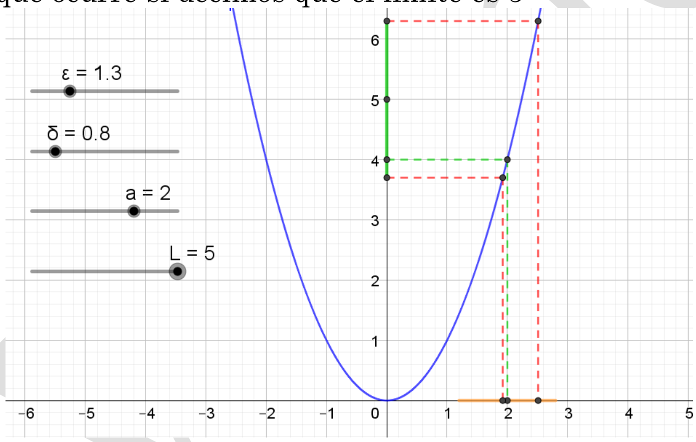
Aunque esto podría contarse, incluso, en 1º de Bachillerato, dejamos al lector que busque información sobre la definición de límite con $\varepsilon - \delta$. Eso sí, dejamos un bonito dibujo, donde se ve el significado de esta rigurosa definición:



La idea que subyace aquí es la siguiente: a medida que hagamos más pequeño épsilon (en verde), el intervalo verde que se ve en vertical se acorta. Pero siempre podemos escoger un delta (en naranja), de forma que el intervalo naranja también se acorte, en la misma manera. Así, el "punto" (2,4) siempre queda encerrado entre las líneas de puntos. Por eso, en este caso:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

Ahora, piensa qué ocurre si decimos que el límite es 5:



Sección 3. Límites puntuales tipo $\infty - \infty$

En los límites puntuales que acaban en una resta de infinitos, como este:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$$

Lo que en realidad ocurre es que se tiene una resta de infinito, o menos infinito. Recuerda que, por ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1} = -\infty \\ \\ \lim_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1} = +\infty \end{cases}$$

Y lo mismo con el segundo. Así, se tienen cuatro opciones, $\pm\infty - (\pm\infty)$, que acaban resultando en tres:

$$\begin{cases} +\infty + \infty = +\infty \\ -\infty - \infty = -\infty \\ \pm\infty \mp \infty \; IND \end{cases}$$

Debido a la última, es por lo que es preferible realizar las manipulaciones algebraicas primero, y posteriormente analizar los posibles casos.

Sección 4. La "no continuidad" de $1/x$

Hace un tiempo, surgió un debate muy interesante sobre si la función $1/x$ era continua o no. Por supuesto, lo primero es que recuerdes la gráfica de esta función. Si nos atenemos a la definición de "la hormiguita" paseando por la gráfica, no sería continua. Pero la definición rigurosa va más allá. Para que una función sea continua en un punto, **debe existir en dicho punto**. En caso contrario, no es que no sea continua, es que **no tiene sentido hablar de continuidad**. De esta forma, la función $1/x$ no existe en $x=0$. Por tanto, no tiene sentido hablar de continuidad en este punto, y la función es continua. Eso sí, es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, pero no porque sea discontinua en cero, sino porque no existe en ese punto.

Para que te hagas una idea, es algo parecido a un enunciado del tipo:

"Estudia la continuidad de $f(x)=3x+1$ en $x=i$"

No tiene sentido la pregunta, ¿verdad? Aquí ocurre lo mismo. Podrías, de la misma forma, preguntarte si la función $f(x)=3x+1$ es continua en "$x=$ rojo". Tampoco tendría sentido. Pues lo mismo ocurre en $x=0$.

Ahora bien, en muchos libros aparece esta discontinuidad, que además se llama de **salto infinito** (y aquí así lo seguiremos). Esto es una forma de facilitar el estudio a un estudiante promedio de este curso. Es algo así como cuando en los primeros cursos de ESO se dice que:
"Cualquier número elevado a cero es 1: $a^0=1$"
¿Es cierto esto? Por supuesto que no, igual que no es cierto que $\frac{a}{a}=1$, que $\sqrt{x^2}=x$, o que $\ln x^2 = 2\ln x$. Eso sí, para facilitarle las cosas a los estudiantes, intentamos ser un poco laxos al principio en las definiciones.
Por si te lo estabas preguntando, ¿es cierto que $a^0=1$, en caso de que $a=0$?

Si quieres ver un interesante artículo sobre la discusión anterior, te invito a que leas este, de gaussianos:

Sección 5. Demostraciones.
Como decíamos, no es frecuente demostrar teoremas en secundaria. No obstante, resulta interesante analizar un par de ellas. Un teorema no es más que una serie de razonamientos lógicos, que permiten probar que algo es cierto (o no). Veamos primero una demostración sencilla:

Demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional

Recordemos que un número irracional es aquel que no podemos escribir como un número racional, es decir, $\frac{a}{b}$, con $a,b\in\mathbb{Z}$ (enteros), y formando una fracción irreducible (es decir, que $mcd(a,b)=1$). Básicamente, decimos que es imposible escribir $\sqrt{2}=\frac{141}{100}$, por ejemplo, y tampoco podría ser $\sqrt{2}=\frac{2}{4}$, pues 2 y 4 se pueden simplificar.

Los pasos para la demostración son sencillos, usando un método que se llama **reducción al absurdo**. Para ello, supongamos que **sí es racional**, es decir:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Con $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible. Despejemos, y elevemos al cuadrado la expresión:

$$2b^2 = a^2$$

Pero, si $a^2 = 2 \cdot b^2$, es porque a^2 debe ser un número par, y en consecuencia, también a debe ser un número par. Por tanto, podemos escribir $a = 2k$, con k un cierto número entero, de forma que:

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2$$

De donde deducimos que b^2 debe ser par, y en consecuencia, que b es par.
Pero si a y b son pares, entonces la hipótesis de partida no puede ser cierta, pues $\frac{a}{b}$ no sería irreducible. Queda entonces demostrado que no puede escribirse $\sqrt{2}$ de esta manera.

Como sugerencia, busca la demostración del Teorema de Pitágoras (es sencilla). Aquí te dejo un blog con un par de demostraciones, entre las que está Pitágoras:

Si estás interesado en este mundo de las demostraciones, busca la de la irracionalidad del número e, los teoremas del seno y coseno, etc. Si quieres ver hasta dónde pueden llegar, un ejemplo interesante (en el que posiblemente no entiendas una palabra), es la demostración de la irracionalidad de π.