Ejercicios clase tema 2

Punto 2.1. Término general

1. Encuentra el término general de las siguientes sucesiones:

$$a)\ a_n = \{1,3,5,7 \dots\}$$
$$b)\ b_n = \{1,-3,9,-27,81 \dots\}$$
$$c)\ c_n = \{2,5,10,17 \dots\}$$
$$d)\ d_n = \left\{1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\dots\right\}$$
$$e)\ e_n = \left\{-\frac{1}{2},\frac{4}{3},-\frac{9}{4},\frac{16}{5},\dots\right\}$$

El término general es una fórmula que hace que, para cada valor de n, se cumpla la sucesión. Para comprobar que es cierta, sustituir n por 1, 2, etc e ir comprobando que efectivamente se obtienen los términos 1, 2, etc (por ejemplo, en la primera sucesión, con $n = 1$, debería obtenerse el término 1, que es 1; con $n = 2$ el término 2, que es 3, etc.). Es importante notar que **hay varias soluciones posibles a cada apartado**. Se muestra una de ellas:

$$a)\ a_n = 2n + 1$$
$$b)\ b_n = (-3)^{n-1}$$
$$c)\ c_n = n^2 + 1$$
$$d)\ d_n = \frac{1}{n^2}$$
$$e)\ e_n = (-1)^n \frac{n^2}{n+1}$$

2. El día 1 de Enero de 2000 decido que cada día voy a ahorrar. Coloco una hucha con 100€, y desde entonces, ahorro 2€ cada día. Ahora, 10 años después, retiro los beneficios. ¿Cuánto tendrá?
Es una sucesión aritmética porque hay que ir sumando una cierta diferencia d de un término al siguiente:
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
El primer término de la sucesión es 100, y la diferencia es 2:
$$\boxed{a_n = 100 + (n-1)\cdot 2}$$
En 10 años, suponiendo 365 días por año, son 3650 días. Tendré que calcular el término 3650:
$$a_{3650} = 100 + (3650-1)\cdot 2 \Rightarrow \boxed{a_{3650} = 7398\ €}$$

3. Una nave espacial parte del km 6370 el día D a la hora H. Cada hora recorre 18000km. Escribe la sucesión aritmética que describe su viaje. Indica dónde se encontrará en 5 años. Busca si será capaz en 5 años de alcanzar Saturno.
Es una sucesión aritmética porque hay que ir sumando una diferencia $d = 18000$ de un término al siguiente:
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
Suponiendo que n mida horas, el término primero es 6370 (el radio de la Tierra), y la diferencia es 18000 (con n en horas):
$$\boxed{a_n = 6370 + (n-1)\cdot 18000}$$
En 5 años, que son 1825 días, habrá recorrido $365\cdot 5\cdot 24 = 43800h$:
$$a_{43800} = 6370 + (43800-1)\cdot 18000 \Rightarrow \boxed{a_{1825} = 788388370\ km = 7.9\cdot 10^8 km}$$
Dado que la distancia promedio de la Tierra a Saturno es de 1.4 miles de millones de km ($1.3\cdot 10^9 km$), y ha recorrido $7.9\cdot 10^8$, inferimos que no alcanzará Saturno pese a la gran velocidad de la nave (18000km por hora, 500 veces mayor que un F1)

4. En una realidad distinta, el ahorrador del ejercicio 1 tiene cantidades distintas y ahorra cantidades distintas. Sabiendo que el día 31 tenía 240€, y el día 101 450€, ¿con cuánto dinero empezó? ¿cuánto ahorra cada día?
Es una sucesión aritmética porque hay que ir sumando una cierta diferencia d de un término al siguiente:
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
El término 31 es 240, y el término 101 es 450:
$$\begin{cases} a_{31} = 240 \\ a_{101} = 450 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + (31-1)\cdot d = 240 \\ a_1 + (101-1)\cdot d = 450 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 30\cdot d = 240 \\ a_1 + 100\cdot d = 450 \end{cases}$$
Tenemos un sistema de ecuaciones con dos ecuaciones y dos incógnitas. Utilizando por ejemplo el método de reducción (restando ecuaciones):
$$70d = 210 \Rightarrow \boxed{d=3} \Rightarrow a_1 = 240 - 30\cdot 3 \Rightarrow \boxed{a_1 = 150}$$
La sucesión es $a_n = 150 + (n-1)\cdot 3$. Empieza con 150€ y ahorra 3€ cada día

5. El primer día de mes pongo en una caja 0.5€. El segundo día 0.75€, el tercero 1€ y así sucesivamente. ¿Cuánto tendré a final de mes?
Es una sucesión aritmética pues la diferencia de un término al siguiente es 0.25€ (vamos sumando 0.25 para conseguir el siguiente término):
$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$
El primer término es 0.5 y la diferencia es 0.25:
$$\boxed{a_n = 0.5 + (n-1)\cdot 0.25}$$
A final de mes (suponiendo que el mes tiene 30 días), tendré que hacer la suma de los primeros 30 términos:
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \Rightarrow S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2}\cdot 30$$
Para lo cual debo calcular el término 30:
$$a_{30} = 0.5 + (30-1)\cdot 0.25 \Rightarrow \boxed{a_{30} = 7.75}$$
Por tanto la suma será:
$$S_{30} = \frac{0.5 + 7.75}{2}\cdot 30 \Rightarrow \boxed{S_{30} = 123.75€}$$

6. El último anfiteatro de un teatro tiene capacidad para 100 personas, el penúltimo para 90, el tercero para 80, etc. ¿Cuántos anfiteatros tiene el teatro? ¿Cuánta gente cabe?
Es una sucesión aritmética en la cual la diferencia es $d = -10$ (vamos bajando 10 de un término al siguiente), y el primer término es 100:
$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \boxed{a_n = 100 + (n-1)\cdot(-10)}$$
Queremos saber cuánta gente cabe, para lo cual debemos saber cuántos términos hay. Como el último término debe ser 10, buscamos n:
$$10 = 100 + (n-1)\cdot(-10) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{n = 10}$$
Hay 10 anfiteatros.
Para saber la gente que cabe haremos la suma de los primeros 10 términos de la sucesión:
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \Rightarrow S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2}\cdot 10$$
Para lo cual debemos calcular el término 10 (que debe ser 10):
$$a_{10} = 100 + (10-1)\cdot(-10) \Rightarrow a_{10} = 10$$
$$S_{10} = \frac{100 + 10}{2}\cdot 10 \Rightarrow \boxed{S_{10} = 550\ asientos}$$

7. Un deportista comienza su entreno con 10 minutos, e incrementa en 5 minutos diarios sus ejercicios. ¿Cuánto tiempo estará entrenando a final de mes? ¿Cuántos minutos acumulará el primer mes?

Es una sucesión aritmética pues de un término al siguiente hay una diferencia de 5, y el primer término es 10:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow \boxed{a_n = 10 + (n-1)\cdot 5}$$

A final de mes (término 31), hará:

$$a_{31} = 10 + (31-1)\cdot 5 \Rightarrow \boxed{a_{31} = 160\, minutos}$$

Pero esto es lo que hace el último día. En total hará la suma de los 31 días:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \Rightarrow S_{31} = \frac{10+160}{2}\cdot 31 \Rightarrow \boxed{S_{31} = 2635\, minutos\ acumulados}$$

Punto 2.4. Sucesiones geométricas

8. En una sucesión geométrica el primer término es 3 y la razón es 5. Calcula el término séptimo.
9. En una sucesión geométrica el tercer término es 12 y el término sexto es 96. Determina el primer término y la razón.
10. Un ordenador pierde un 20% de su valor cada año desde que fue comprado. Sabiendo que costó 1000€, determina su precio 10 años después. ¿Cuánto tiempo ha pasado cuando su valor es de 10€?
11. El primer término de una sucesión geométrica es 5040. El segundo es 2520. Determina la razón de la sucesión, el término cuarto, y el término 50. ¿Notas algo en especial? ¿Puedes calcular el término 1000?
12. Cuando Fry es congelado en el año 2000 tiene 0.93$ en el banco al 2.25% de interés (crece un 2.25% cada año). 1000 años después, acude al banco para pagar una multa con el dinero que tiene en la cuenta. ¿Cuánto tiene? (Futurama, capítulo 1x06: *a fishful of dollars*)

Punto 2.5. Suma de una progresión geométrica

13. De una progresión geométrica sabemos que el primer término vale 2 y el cuarto 54. Halla la razón y la suma de los primeros seis términos.
14. La razón de una progresión geométrica es 3 y el tercer término 45. Halla la suma de los primeros 7 términos.
15. Una sucesión geométrica tiene como primer término 100, y como razón 0.8. Calcula los primeros 4 términos. Calcula el término 100. Calcula la suma de los infinitos términos.
16. La razón de una progresión aritmética es ¾, y el segundo término vale 2. Halla la suma de los infinitos términos.

Punto 2.6. Límite de sucesiones

17. Escribe los términos que consideres necesarios en las siguientes sucesiones y determina si son convergentes o divergentes. En caso de ser convergentes, india su límite

$$a)\ a_n = n^2 \qquad b)\ b_n = \frac{1}{n^2} \qquad c) c_n = \frac{n}{n+3}$$

$$d)\ d_n = (-2)^n \qquad e) e_n = \frac{n^2}{n+1} \qquad f)\ f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Soluciones:

$(-1)^n \cdot \frac{n^2}{n+1}$	131.25	$150 \ y \ 3$	$\frac{1}{n^2}$	$4.19 \cdot 10^9$
46875	$(-3)^{n-1}$	$134.2; 21.6$	$155; 2475$	$C; 1$
$C; 0$	5465	16	D	$7.9 \cdot 10^8; No$
$10; 550$	$3; 728$	$2n + 1$	$00; 80; 64; 51'2$ $2'5 \cdot 10^{-8}; 500$	
D	D	1	$315; 8.9 \cdot 10^{-12}; 0$	
$3; 2$	7400	$C; e$	$n^2 + 1$	