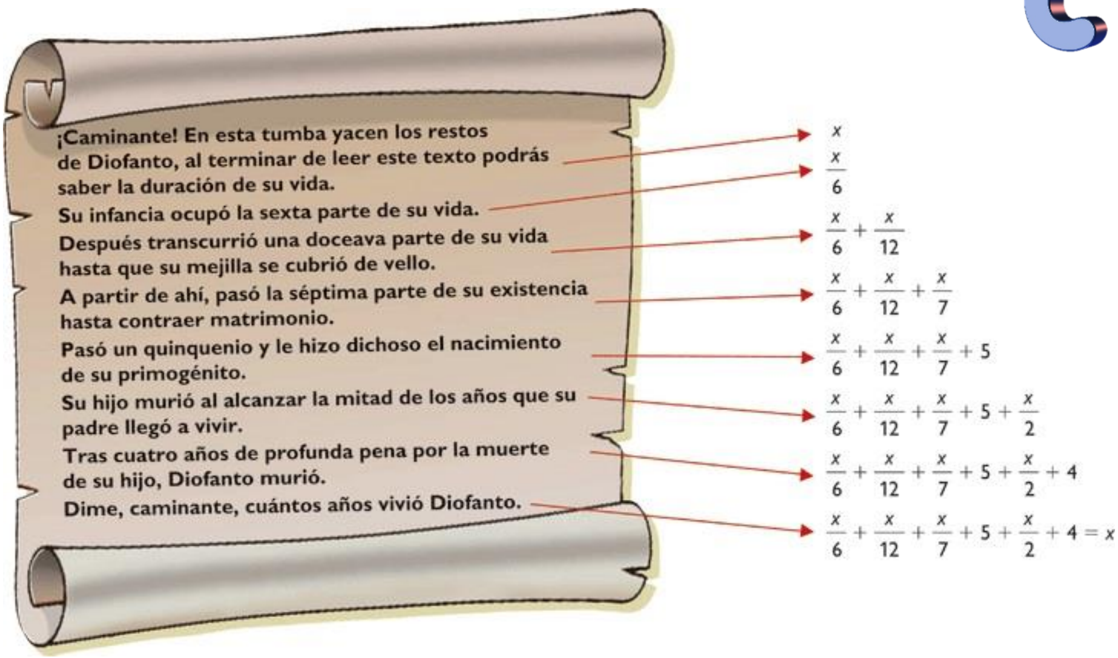
S3. Tema6. Ecuaciones

La tumba de Diofanto (true story?)



Solución: Diofanto murió con 84 años.

6.1. Ecuaciones de primer grado

Recordemos muy brevemente las ecuaciones de primer grado, aunque iremos directamente a las ecuaciones con denominadores y paréntesis.

Ejemplo 1. Resuelve:

$$\frac{x}{2}-\frac{2x-1}{3}=\frac{x+3}{5}-7$$

Solución1

Multiplicamos toda la ecuación por el mcm de los denominadores, que es 30:

$$30\cdot\frac{x}{2}-30\cdot\frac{2x-1}{3}=30\cdot\frac{x+3}{5}-30\cdot 7$$

Sin hacer las multiplicaciones, simplificamos el 6 con los denominadores.
MUCHO CUIDADO CON LOS SIGNOS MENOS

$$15x-10(2x-1)=6(x+3)-210$$

Deshacemos y calculamos:

$$15x-20x+10=6x+18-210\Rightarrow -5x+10=6x-192\Rightarrow 202=11x\Rightarrow \boxed{x=\frac{202}{11}}$$

Solución 2

Calculamos el mcm en el lado izquierdo y en el lado derecho por separado, y operamos:

$$\frac{3x}{6}-\frac{2(2x-1)}{6}=\frac{x+3}{5}-\frac{35}{5}\Rightarrow\frac{3x-2(2x-1)}{6}=\frac{x+3-35}{5}$$

Arreglamos un poco los numeradores:

$$\frac{3x-4x+2}{6}=\frac{x-32}{5}\Rightarrow\frac{-x+2}{6}=\frac{x-32}{5}$$

Ahora, pasamos el 5 multiplicando a la izquierda, y el 6 a la derecha.

$$-5x + 10 = 6x - 192$$ Y finalmente despejamos: $$202 = 11x \Rightarrow \boxed{x = \frac{202}{11}}$$
Solución 3: hacemos el mcm a toda la ecuación
Esencialmente es igual que la solución 1: $$\frac{15x}{30} - \frac{10(2x-1)}{30} = \frac{6(x+3)}{30} - \frac{210}{30}$$ "Quitamos" los denominadores, con mucho cuidado de los signos menos. $$15x - 10(2x-1) = 6(x+3) - 210$$ Y operamos: $$15x - 20x + 10 = 6x + 18 - 210 \ldots \boxed{x = \frac{202}{11}}$$

Prueba tú

Resuelve: $$\frac{x-2}{3} - \frac{2(1-x)}{2} - x = 2x - \frac{5}{4}$$
Solución: $x = -1/4$

6.2. Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado, en general, es aquella que tiene al menos una variable con exponente 2. Recuerda que pueden tener 0 soluciones, 1 solución o 2 soluciones.

Las ecuaciones de 2º grado siempre tienen la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Y, si no la tienen, siempre pueden llevarse a esa forma moviendo términos. Dentro de estas, distinguimos:

Completa	Incompleta $b = 0$	Incompleta $c = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$	$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$ $\boxed{x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}}$	$ax^2 + bx = 0$ Factor común: $x(ax + b) = 0$ $\boxed{x_1 = 0}$ $ax + b = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{b}{a}}$
$x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $\boxed{x_1 = 3 \qquad x_2 = 2}$	$3x^2 - 5 = 0$ $3x^2 = 5$ $x^2 = \frac{5}{3}$ $\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{3}}$	$6x^2 - 5x = 0$ Factor común: $x(6x - 5) = 0$ $\boxed{x_1 = 0}$ $6x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{5}{6}}$

En este curso aparecerán con frecuencia ecuaciones de segundo grado ocultas en una maraña de operaciones, igualdades notables, etc.

Ejemplo. Resuelve:

$$(2x-1)^2 - 3 \cdot (x-2)(x+3) + 5x - 18 = \frac{2(x-1)}{3} - \frac{(x+1)(x-1)}{4}$$

Como sugerencia, eliminamos primero los paréntesis (igualdades notables):

$$4x^2 + 1 - 4x - 3(x^2 + 3x - 2x - 6) + 5x - 18 = \frac{2(x-1)}{3} - \frac{x^2-1}{4}$$

$$4x^2 + 1 - 4x - 3x^2 - 9x + 6x + 18 + 5x - 18 = \frac{2x-2}{3} - \frac{x^2-1}{4}$$

E intentamos arreglar un poco el lado izquierdo. Aunque se puede hacer con toda la ecuación, haremos el mcm solo en el lado derecho:

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{4(2x-2) - 3(x^2-1)}{12}$$

Ahora, el 12 pasa multiplicando:

$$12x^2 - 24x + 12 = 8x - 8 - 3x^2 + 3$$

Finalmente, pasamos todo a un lado:

$$15x^2 - 32x + 17 = 0 \Rightarrow x = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 1020}}{30} = \frac{32 \pm 2}{30} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{17}{15} \end{cases}}$$

Nota: increíblemente han salido soluciones "decentes", porque la ecuación (promesa) ha sido puesta al azar. Sin embargo, si esto no ocurriese, no hay más que dejar indicadas las soluciones, por ejemplo $x = \frac{-6 \pm \sqrt{17}}{8}$

Ejercicio. Resuelve: $$2x-1-(x-1)^2-\frac{5}{2}=\frac{x-3}{2}-\frac{(x+2)(x-2)}{3}$$
Solución: $x_1=2$, $x_2=\frac{13}{4}$ (esta sí está hecha a propósito)

6.3. Ecuaciones bicuadradas

Existe un caso especial de ecuaciones de orden superior que no necesita ninguna técnica especial para resolverse. Estas ecuaciones tienen la forma siguiente:

$$ax^4+bx^2+c=0 \quad \text{o bien} \quad ax^6+bx^3+c=0$$

Y, en general, dos potencias de x que sea una el cuadrado de la otra.

Para resolver estas ecuaciones, usamos un **cambio de variable**, por ejemplo $\boxed{t=x^2}$, de forma que $t^2=x^4$, y la ecuación quedaría $at^2+bt+c=0$.

Por supuesto, una vez calculado t, hay que **deshacer el cambio de variable**, calculando x. Pero veámoslo en un ejemplo:

Ejemplo: resuelve

$$x^4-5x^2+4=0$$

Hacemos el cambio de variable $t=x^2 \Rightarrow t^2=x^4$, de forma que la ecuación queda:

$$t^2-5t+4=0$$

Que resolvemos:

$$t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}\Rightarrow \boxed{\begin{cases} t_1=4 \\ t_2=1 \end{cases}}$$

Ahora queda deshacer el cambio de variable:

$$t=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{t}\Rightarrow \begin{cases} t_1=4\Rightarrow x_{12}=\pm 2 \\ t_2=1\Rightarrow x_{34}=\pm 1 \end{cases}$$

Es decir, las soluciones son:

$$\boxed{x=\{-2,-1,1,2\}}$$

Aunque el máximo de soluciones siempre es 4 (o 6, en el segundo ejemplo), también puede que haya menos. Veamos el siguiente ejemplo.

Es muy importante distinguir un polinomio de una ecuación. En el ejemplo anterior **no existen raíces**, sino **soluciones**. Y no hay que factorizar nada. Ahora bien, si la pregunta es factoriza y di las raíces del polinomio:

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

Lo que habría que hacer es empezar igualándolo a cero, por lo que aparece la ecuación bicuadrada:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = \{-2, -1, 1, 2\}$$

Ahora tenemos las raíces, por lo que podemos factorizar:

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

Y las raíces son $-2, -1, 1, 2$

Ejemplo: resuelve

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

De nuevo hacemos el cambio $t = x^2 \Rightarrow t^2 = x^4$, quedando:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio:

$$\begin{cases} t_1 = 4 \Rightarrow x_{12} = \pm 2 \\ t_2 = -1 \Rightarrow x_{34} = \sqrt{-1} \end{cases}$$

Las soluciones 3 y 4 son una raíz negativa y, por tanto, no existen. Así pues, las únicas soluciones son:

$$\boxed{x_1 = 2, \qquad x_2 = -2}$$

¿Qué habría ocurrido si me piden factorizar $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$?
Al igualar a cero, sacamos dos raíces. Sin embargo, por sentido común, es imposible que:

$$x^4 - 3x^2 - 4 \neq (x-2)(x+2)$$

Por tanto, ¿que habría que hacer en un caso como este, en que nos faltan dos raíces? Fíjate que no tenemos que buscarlas, pues la ecuación anterior lo que dice es que no hay más raíces. Por tanto, habrá algo más, que no tiene raíces. Factoricemos el polinomio con Ruffini, sabiendo que se cumple con 2 y -2. Lo haremos de un golpe:

	1	0	-3	0	-4
2		2	4	2	4
	1	2	1	2	0
-2		-2	0	-2	
	1	0	1	0	

Fíjate bien en los pasos. En el primer paso logramos la primera factorización:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + x + 2)$$

En el segundo, la segunda factorización:

$$\boxed{x^4 - 3x^2 - 4 = (x-2)(x+2)(x^2+1)}$$

Ahora, fíjate que para factorizar lo que queda, el $x^2 + 1$, bastaría hacer una ecuación de segundo grado. Sin embargo:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1}$$

Es decir, que efectivamente no hay solución.
El factor $x^2 + 1$ es lo que se llama un factor **primo**, al igual que $x + 2$ o $x - 1$. Podría ser algo así como un primo grande, como el 541 (que es el primo número 100; y aunque parezca mentira es primo). O el 7919, que es el primo nº 1000.
Por tanto, así queda factorizado, y raíces solo tiene 2 y -2.

Ejemplo: resuelve

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

Hacemos el cambio $t = x^3 \Rightarrow t^2 = x^6$, quedando:

$$t^2 - 7t - 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 8 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio:

$$\begin{cases} t_1 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x_1 = 2 \\ t_2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

Recuerda que las raíces cúbicas de un número negativo existen, pues $(-1)^3 = -1$.

Así pues, las soluciones son:

$$\boxed{x_1 = 2, \qquad x_2 = -1}$$

¿Qué habría ocurrido si me piden factorizar $P(x) = x^6 - 7x^3 - 8$?
Al igualar a cero, sacamos las dos raíces. Hagamos Ruffini para factorizar con esas dos raíces. Mucho cuidado con los ceros:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & & -1 & -1 & -3 & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & \end{array}$$

Queda, pues:

$$\boxed{x^6 - 7x^3 - 8 = (x-2)(x+1)(x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x + 4)}$$

El factor $(x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x + 4)$ será, por tanto, primo. Por mucho que cueste creerlo, no hay ningún valor, entero o decimal, que haga que la ecuación:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = 0$$

Se cumpla. Es completamente imposible. Por tanto, el polinomio queda así factorizado, y las raíces serán 2 y -1.

Ejercicio 1. Resuelve

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Ejercicio 2. Resuelve: $$(x-2)^2+x^4+2x(x^2-1)=2x^3+2x(2x-3)+8$$
Ejercicio 3. Resuelve: $$x^4-x^2-2$$
Ejercicio 4. Resuelve: $$x^6+9x^3+8=0$$
Soluciones: $Ej1)\pm 2, \pm 3$, $Ej2)\pm 2, Ej3{:}\ x=\pm\sqrt{2}$, $Ej4{:}\ -1, -8$

A partir de aquí, las ecuaciones de grado superior a 2 que no sean bicuadradas habrá que hacerlas usando **Ruffini**. Que es lo mismo que decir “a la cuenta de la vieja”, de no tener el detalle de los divisores del término independiente como pista, aunque no siempre funciona. Por supuesto, de cara a un examen, existirán soluciones ± 1 o como mucho ± 2 en este tipo de ecuaciones.

6.4. Ecuaciones con radicales

El siguiente paso es calcular ecuaciones que tengan uno o varios radicales. El proceso es sencillo. Si sólo tienen un radical:

- Intenta despejar dicho radical.
- Eleva toda la ecuación al cuadrado.
- Opera normalmente.
- Comprueba la solución/es

En el caso de que tuviese dos radicales:

- Despeja uno de los radicales.
- Eleva toda la ecuación al cuadrado. Aparecerá otro radical.
- Vuelve a despejar el nuevo radical.
- Vuelve a elevar toda la ecuación al cuadrado.
- Opera normalmente
- Comprueba la solución/es

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Resuelve

$$1-\sqrt{x-1}=x$$

Intentemos despejar la raíz, preferiblemente con signo positivo:

$$1-x=\sqrt{x-1}$$

Ahora, elevamos todo al cuadrado:

$$(1-x)^2=\left(\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow 1+x^2-2x=x-1$$

Y operamos normalmente:

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=1 \end{cases}$$

Ahora, es muy importante comprobar las soluciones, porque puede que o bien no se pueda hacer la raíz, o bien el resultado no sea correcto. Recuerda que en operaciones, las raíces llevan su signo. Es decir, igual que $\sqrt{4}=\pm 2$, si está en una operación $3-\sqrt{4}=3-2=1$:

$$\begin{cases} x_1=1 \quad 1-\sqrt{1-1}\underset{?}{=}1 \quad 1-0=1\ ok \\ x_2=2 \quad 1-\sqrt{2-1}\underset{?}{=}2 \quad\ \ 1-1\neq 2 \end{cases}$$

Por tanto, la única solución válida es $\boxed{x=1}$

Ejemplo 2. Resuelve:

$$2x-\sqrt{x}=\sqrt{x-1}+x$$

Despejamos una de las raíces:

$$x-\sqrt{x}=\sqrt{x-1}$$

Elevamos todo al cuadrado:

$$\left(x-\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{x-1}\right)^2$$
$$x^2+x-2x\sqrt{x}=x-1$$

Intentemos arreglar un poco todo esto. Despejamos también la raíz:

$$x^2+x-x+1=2x\sqrt{x} \Rightarrow x^2+1=2x\sqrt{x}$$

Y volvemos a elevar al cuadrado:

$$(x^2+1)^2=\left(2x\sqrt{x}\right)^2$$
$$x^4+2x^2+1=4x^2\cdot x \Rightarrow x^4-4x^3+2x^2+1=0$$

Para resolver esta ecuación, al no ser bicuadrada, la única forma es con Ruffini. A la vista del término independiente lo más probable es que la solución sea 1 o -1. Por el teorema del resto:

$$P(1) = 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 4 + 2 + 1 = 0 \ \ ok$$

Así que hacemos Ruffini con $x = 1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & -3 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Como era de esperar. Factorizando la ecuación:

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - x - 1) = 0$$

Y tenemos ya una solución, que es $\boxed{x = 1}$. Además, vemos que es válida:

$$2 \cdot 1 - \sqrt{1} \underset{?}{=} \sqrt{1-1} + 1 \Rightarrow 2 - 1 = 0 + 1 \ \ ok$$

Y llegamos a algo muy interesante. La ecuación que nos ha quedado, a mano, solo podemos llegar a la conclusión de que quizá tenga una raíz 1 (puede ser doble) o (-1), pues son los divisores del término independiente. Sin embargo, aplicando el teorema del resto, ninguno de los dos valores funcionan.

¿Podemos asegurar que no hay solución? No. Podemos asegurar que no sabemos si hay más soluciones, solo eso. Por tanto, y dado que estamos haciendo los ejercicios a mano, deberíamos indicar que **la solución es $x = 1$, pero podría haber más.**

De hecho, calculando con ordenador, la otra solución (esta ecuación solo tiene dos soluciones), es $x = 3.38297576790624 \ldots$. Jamás habríamos llegado a esta solución a mano. Además, comprobando, sí es solución de la ecuación original. Pero, sin un ordenador (u otras técnicas superiores), no habría sido posible sacarla.

Ejercicio 1. Resuelve:

$$2x - \sqrt{x+2} = 2$$

Ejercicio 2. Resolver:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$$

Soluciones: ej1: 2; ej2: 0

Curiosidad: ¿por qué hay que comprobar?

En los pasos que hemos hecho antes, en realidad hay un paso que no es correcto del todo, que es elevar al cuadrado una raíz suponiendo que todo irá bien. En realidad, en este paso ocurren dos cosas.

- Por una parte, no es correcto al cien por cien decir que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. Imagina que $x = -1$. En este caso $\sqrt{-1}$ no existe, y si elevas "no existe" al cuadrado no da -1, sino "no existe". Así pues, deberíamos decir:
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \Leftrightarrow x \geq 0$$
- El segundo fallo es que al elevar al cuadrado destruimos los signos, y eso puede que no sea correcto, porque al operar con raíces tomamos siempre el signo que lleva la raíz, por lo que el signo importa. Fíjate en estas dos ecuaciones:

$\sqrt{x} - 1 = 0$	$\sqrt{x} + 1 = 0$

Son ecuaciones con raíces muy sencillas. Sin embargo, en su resolución vemos que llevan a las mismas soluciones, pese a no ser iguales:

$\sqrt{x} - 1 = 0$	$\sqrt{x} + 1 = 0$
$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = 1^2$	$\sqrt{x} = -1 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = (-1)^2$
$x = 1$	

Ahora, fíjate que realmente esta solución, que sale en las dos ecuaciones, sólo es válida para la primera de ellas:
$$\sqrt{1} - 1 \underset{?}{=} 0 \Rightarrow 1 - 1 = 0 \;\; ok$$
Sin embargo, para la segunda no lo es:
$$\sqrt{1} + 1 \underset{?}{=} 0 \Rightarrow 1 + 1 \neq 0$$
Por tanto la solución a la primera ecuación es $x = 1$, mientras que la segunda ecuación **no tiene solución**.

6.5. Ecuaciones con fracciones algebraicas

La metodología para estas ecuaciones es sencilla: operar con las fracciones algebraicas hasta que se pueda "quitar" el denominador. Eso sí, eso nos obligará a, cuando acabemos el ejercicio, comprobar en la ecuación original que la solución no haga cero ningún denominador. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo1. Resuelve:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}=\frac{x+1}{x^2}$$

Hacemos el mcm, que en este caso es $x^2(x-2)$:

$$\frac{x(x-2)}{x^2(x-2)}-\frac{x^2}{x^2(x-2)}=\frac{(x+1)(x-2)}{x^2(x-2)}$$

"Quitamos" denominadores (este es el paso "incorrecto"

$$x(x-2)-x^2=(x+1)(x-2)$$

Y operamos:

$$x^2-2x-x^2=x^2-2x+x-2$$
$$-2x=x^2-x-2 \Rightarrow x^2+x-2=0$$

Resolvemos:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2\end{cases}}$$

Y, sin mucho esfuerzo, comprobamos que ambas son soluciones (hay que dejar indicada esta frase para que se vea que sabemos que hay que comprobar).
La comprobación consiste nada más que ver si alguno de estos dos valores hace cero algún denominador en la ecuación original. Como no lo hace, ambos son solución.

Ejemplo 2.

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}=x+\frac{1}{x-1}$$

Hacemos el mcm, que es $(x+1)(x-1)$

$$\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

Y quitamos denominadores:

$$x(x+1)-2x(x-1)=x(x-1)(x+1)+x+1$$

Operamos:

$$x^2+x-2x^2+2x=x(x^2-1)+x+1$$

Seguimos:

$$-x^2+3x=x^3-x+x+1$$

Dejamos todo en el lado derecho y damos la vuelta a la ecuación:

$$x^3+x^2-3x+1=0$$

Para resolver esta ecuación, empezamos por Ruffini. A la vista del término independiente podemos probar con ± 1. Por el teorema del resto vemos que con el valor $x=1$ se cumple:

$$P(1)=1^3+1^2-3\cdot 1+1=1+1-3+1=0 \;\; ok$$

Así que hacemos Ruffini:

	1	1	−3	1
1		1	2	−1
	1	2	−1	0

Por tanto, podemos factorizar el polinomio que forma la ecuación como:

$$(x-1)(x^2+2x-1)=0$$

Para seguir, utilizamos la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(-1\pm\sqrt{2}\right)}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

Fíjate bien cómo hemos simplificado las soluciones. Este es un cálculo bastante habitual. Fíjate además que no me han quedado valores “bonitos”. No pasa nada.
Así pues, tenemos tres candidatos a soluciones:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1 - \sqrt{2} \qquad x_3 = -1 + \sqrt{2}$$

Pero falta comprobarlas. Y vemos que justo $x = 1$ hace cero el denominador de la primera y la última fracción del enunciado. Por tanto, **no es solución**.
Sin embargo (sin necesidad de calculadora), vemos que es imposible que ninguno de los otros valores hagan cero ningún denominador (aun así hay que dejar esta frase indicada). Por tanto, las soluciones son:

$$\boxed{x_1 = -1 - \sqrt{2} \qquad x_2 = -1 + \sqrt{2}}$$

Ejercicio 1. Resuelve:

$$\frac{x-1}{x^2} - x = \frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{x-1}{x+2}$$

Ejercicio 2. Resuelve:

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{4}{x-2} - 2$$

Solución: Ej1: 1; Ej2: $\frac{1}{4}$

¿Y dónde está el fallo?

Vimos en las raíces que el “error” era el signo de las raíces. Pero ¿cuál es el fallo profundo en este tipo de ecuaciones? ¿Por qué si x no puede ser 1 porque cancela el denominador, al final sale $x = 1$ como solución?

Analicemos la ecuación del ejemplo:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} = x + \frac{1}{x-1}$$

Si pasamos en bloque la última fracción al principio, restando, y la colocamos al lado de la primera, tenemos:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x+1} = x$$

Ahora bien, puedo restar ambas fracciones porque tienen el mismo denominador:

$$\frac{x-1}{x-1} - \frac{2x}{x+1} = x$$

Y aquí llega el problema. Al “quitar denominadores”, hacemos un paso que no siempre es correcto. Porque “quitar denominadores” consiste en multiplicar a toda la ecuación por, en este caso, $(x-1)(x+1)$, y cancelar términos multiplicando y dividiendo. Que es lo mismo que decir que:

$$\frac{x-1}{x-1} = 1$$

Lo cual es correcto… casi siempre. Concretamente siempre que $x \neq 1$.

Es por esto que hay que comprobar. El paso que va de $\frac{x-1}{x-1}$ a poner 1 debería ir acompañado de “suponiendo que $x \neq 1$”. A cambio de no ponerlo, tenemos que hacer la comprobación después.

Fíjate de hecho como, de esta forma, la ecuación se resuelve rápido:

$$\frac{x-1}{x-1} - \frac{2x}{x+1} = x \Rightarrow 1 - \frac{2x}{x+1} = x \Rightarrow 1 - x = \frac{2x}{x+1}$$

Pasamos el $x + 1$ multiplicando:

$$(1-x)(1+x) = 2x \Rightarrow 1 - x^2 = 2x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \;(\ldots)$$

Que, con estos pasos, ya se ha descartado automáticamente el $x = 1$

Estoy rodeado de gente, pero estoy solo

Esta es una demostración de que todos los números son iguales a cero. Para hacerlo, partimos de que dos números, x e y cualesquiera (no necesariamente cero), son iguales. Y hacemos los siguientes pasos:

Dos números son iguales	$x = y$
Multiplicamos ambos por x	$x^2 = xy$
Restamos a ambos lados y^2	$x^2 - y^2 = xy - y^2$
Hacemos la igualdad notable a la izquierda, y factor común a la derecha	$(x+y)(x-y) = y(x-y)$
Pasamos uno de los $(x-y)$ al otro lado dividiendo	$\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)} = y \Rightarrow x + y = y$
Una vez simplificado, despejamos x	$x = y - y \Rightarrow \boxed{x = 0}$

Es decir, acabamos de demostrar que todos los números valen cero. Obviamente en esta demostración hay un error. Muy fino. ¿Sabrías encontrarlo?

6.6. Ecuaciones factorizadas

Nos queda tan solo un tipo de ecuaciones muy muy muy sencillas. Para el que sabe verlas. Ecuaciones que ya están factorizadas, como por ejemplo:

$$(x-1)(x+2)(x-3)=0$$

En estas ecuaciones, lo que tenemos es el producto de tres cosas, igualado a cero:

$$A \cdot B \cdot C = 0$$

Pero, para que eso sea cero, **basta que una de esas tres cosas sea cero**. Así que podemos "partir" la ecuación en tres:

$$(x-1)(x+2)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 & \boxed{x_1=1} \\ x+2=0 & \boxed{x_2=-2} \\ x-3=0 & \boxed{x_3=3} \end{cases}$$

Por supuesto, **jamás operes una ecuación de esta forma**. Sin embargo, sí deberías hacerlo si no está igualada a cero:

$$(x-1)(x+2)(x-3)=1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow Ruffini \Rightarrow \cdots \Rightarrow Segundo\ grado \ldots$$

A modo de ejemplo, una chorrada:

Ejemplo: determina las soluciones de la ecuación:

$$2x^2(x-1)^3(x+2)^2(x^2-9)(2x+3)(x+\pi)=0$$

Por orden. El primer factor es 2, que nunca será cero. No da soluciones.
El segundo factor es x^2, que da 0 (doble, por el cuadrado).
El siguiente es $(x-1)^3$, que dará $x=1$ (triple, por el cubo)
El siguiente x^2-9, que al igualarlo a cero tenemos $x=\pm 3$
El siguiente, $2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ (simple)
Y por último, $x+\pi=0 \Rightarrow x=-\pi$

Las soluciones son, por tanto:

$$x=0\ (doble), 1\ (triple), \pm 3, -\frac{3}{2}, \pi$$

Y no hay que hacer absolutamente nada más…

Bibliografía

- Diofanto: http://www.ingenierogeek.com/2013/08/edad-diofanto-tiempo-vida-ecuacion-solucion.html