S3. Tema3. Proporcionalidad

3.1. Porcentajes

Para calcular porcentajes tenemos varias formas. No obstante, en este curso y en lo sucesivo se utiliza el **índice de variación**. Es más cómodo, más fácil y más aplicable a la vida real.

La teoría es sencilla. Si P_f es el precio final a pagar, y P_i el precio inicial del objeto en cuestión, la relación entre ambas es:

$$\boxed{} \qquad \begin{cases} k = \boxed{} & \text{si es una subida} \\ k = \boxed{} & \text{si es una bajada} \end{cases}$$

Donde p es, obviamente, el porcentaje.

Ej1. Calcula el precio final de un objeto de 1000€ al que se ha aumentado un 30%	Ej2. Calcula el precio inicial de un objeto al que se ha aumentado un 20%, por el que se han pagado 900€
Ej3. Calcula el precio final de un objeto de 1000€ al que se ha rebajado un 30%	Ej4. Calcula el precio inicial de un objeto al que se ha rebajado un 20%, por el que se han pagado 900€
Ej5. Calcula el aumento aplicado a un objeto de 800€, por el que se ha pagado 1000€	Ej6. Calcula la rebaja aplicada a un objeto de 1000€, por el que se ha pagado 800€

Por supuesto, esto no es válido solo para precios de objetos, aunque sí suele ser lo más cotidiano. Podemos aplicarlo también, por ejemplo, a cantidad de personas o cualquier otra cosa:

Ej7: la población de un país de 40 millones de habitantes se ha incrementado un 15% en un año por la acogida de refugiados de guerra. Determina la cantidad de gente que habrá en ese país ese año.

Demostración:

La fórmula antes mostrada no tiene misterio. Si queremos aumentar una cierta cantidad P_i un cierto porcentaje p, lo que hacemos es calcular el aumento porcentual (en el caso de disminución se haría igual):

$$Aumento =$$

Y luego se lo sumaríamos a la cantidad inicial, de nuevo P_i:

$$P_f =$$

Si sacamos factor común a P_i, tenemos justo la expresión buscada:

$$P_f =$$

3.1.1. Porcentajes concatenados

Una de las mayores utilidades de esta forma de operar es cuando tenemos varios aumentos, varias bajadas, o una combinación de estos. Hacer las cuentas con, por ejemplo, regla de tres en este caso, resulta muy tedioso. Y más aún si el objetivo es calcular el precio inicial sabiendo el final. Sin embargo, con esto, resulta muy sencillo.

Si tenemos varias subidas y bajadas porcentuales, cada una tendrá una k, a la que llamaremos k_i, donde $i = 1, 2, 3 \ldots$

La k total se calcula multiplicando:

$$k =$$

Y la expresión utilizada es la misma que antes:

OJO: los porcentajes no son cantidades que se puedan sumar y restar. Así, hacer dos subidas de un 20% no equivale a una de un 40% (si bien aproximadamente es parecido), sino a un 44%. De igual manera, hacer una subida de un 20% y luego una bajada de un 20% no equivale a un 0%, por contradictorio que pueda parecer, sino a un   de descuento en global. Más tarde veremos por qué.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: a un producto de 1000€ se le aplica una subida de un 20%, seguida de un descuento de un 10%. Calcula el precio final.
Calculamos cada una de las dos k: $k_1 = \boxed{}$ $k_2 = \boxed{}$ Con ellas, calculamos "la k": $k = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$ Y a partir de aquí hacemos el mismo ejercicio que en los primeros: $P_f = k \cdot P_i \Rightarrow P_f = \boxed{} = \boxed{}$
Ejemplo 2: un objeto ha costado 1000€ después de dos subidas de un 20% por impuestos, y un descuento del 40%. Calcula cuánto costaba antes de estas subidas y bajadas.
Ejemplo 3: después de un 20% de descuento y un aumento debido a un impuesto, un objeto se ha quedado como estaba. Calcula qué porcentaje supone dicho impuesto.
Puede parecer que faltan datos en este ejercicio, pero no es así. Primero calculamos la única k que podemos calcular: $k_1 = \boxed{}$ La k global será el producto de esta por k_2, que no conocemos, y será justo lo que queremos calcular: $k = \boxed{}$ Ahora usamos la fórmula general: $P_f = k \cdot P_i$ Pero como los precios inicial y final queremos que sean iguales, podemos llamarlos a ambos x: $\boxed{}$ Si pasamos x de un lado al otro se cancelará con la otra, quedando 1. De modo que: $\boxed{}$ Sustituyendo por la $\boxed{}$ tenemos que: $\boxed{} \Rightarrow \boxed{}$ $\boxed{}$ Esto corresponde a un aumento, pues es mayor que 1. Aunque se ve a simple vista, veamos cuánto es el aumento: $\boxed{} \Rightarrow \boxed{} \Rightarrow$ $p = \boxed{}$ de impuesto

Curiosidad: uno de tantos bulos que circulan por los medios tiene que ver con algo que se puso de moda hace algunos años: los "días sin IVA". El bulo que empezó a circular es que los centros que hacían estos días sin IVA, previamente subían el IVA a los productos para, una vez descontado, el precio de los mismos fuese el mismo.

Es muy improbable, en una sociedad tan informatizada, que esto sea cierto, ya que sería muy sencillo de comprobar. No obstante, asumamos que un cierto empresario, digamos Bartolo, decide hacer esta estrategia.

Él piensa que, si primero sube el 20% del artículo y luego lo baja un 20%, el precio quedará igual. Calculemos lo que ocurre en la realidad, y el dinero que perderá Bartolo con un videojuego, por ejemplo, de 80€:

Calculamos ambas k:

$$k = k_1 \cdot k_2 = \boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$$

Por tanto, el objeto con esta subida y bajada consecutiva pasará a valer:

$$P_f = \boxed{} \cdot 80 = \boxed{}$$

Bartolo ha supuesto que al hacer esta subida y bajada, el precio final no variará, mientras que en la realidad el objeto pasa de 80€ a 76.8€.

Es decir, Bartolo ha hecho que su empresa pierda 3.2€. Lo ha hecho mal, pero no parece un trauma.

Ahora bien, supongamos que Bartolo es en realidad el responsable de la venta de FIFA17, que solo en Febrero, con unos pocos meses de venta del producto, ya había vendido 650000 copias (fuente: http://meristation.as.com/).

Ahora hagamos las cuentas. Cada uno de los videojuegos le ha costado a la empresa 3.2€. Al haber vendido 650000:

$$3.2€ \cdot 650000 = \boxed{}$$

Es decir, Bartolo acaba de hacer que su empresa pierda más de 2 millones de € por no saber matemáticas.

Y esto es una estimación muy baja, porque los datos llegan hasta enero, y el producto salió el 29 de Septiembre. Y solo en España. Intenta imaginar lo que le habría costado a la empresa de Bartolo a día de hoy, y a nivel mundial…

Curiosidad: cuando aumentamos un cierto porcentaje p y luego lo bajamos, ocurre algo muy especial. Fíjate que la k resultante viene dada por:

$$k = \boxed{} \cdot \boxed{}$$

Pero esto es justamente una **igualdad notable**, es decir:

$$k = \boxed{}$$

Pero, así colocado, esto equivale a un descuento (por el menos), que viene dado por:

$$k = \boxed{}$$

Es decir, el descuento es directamente $\boxed{}$

Sacamos dos conclusiones:

- La primera: subir y bajar una cantidad siempre lleva a un $\boxed{}$.
- La segunda: resulta sencillo calcular este descuento.

Por ejemplo, si subimos y bajamos un 30%, el descuento global será $\boxed{}$ mientras que si subimos y bajamos un 50%, el global será $\boxed{}$

Curiosidad: aunque retomaremos esto en interés compuesto, y en sucesiones, hay un capítulo de Futurama (concretamente el capítulo 1x06: "a fishful dollar". El problema dice lo siguiente:

Cuando Fry es congelado en el año 2000 tiene 0.93$ en el banco al 2.25% de interés (crece un 2.25% cada año). 1000 años después, acude al banco para pagar una multa con el dinero que tiene en la cuenta. ¿Cuánto tiene? (Futurama, capítulo 1x06: a fishful of dollars)

Lo que se hace para este cálculo es un interés compuesto. Es decir, se aplica un 2.25 seguido de otro 2.25, etc, hasta 1000 años. Es decir, se tiene la misma k repetida 1000 veces, por tanto (llamando k_i a cualquiera de las 1000 ks):

$$k_i = \boxed{} = \boxed{}$$

Al estar repetida 1000 veces:

$$k = 1.0225 \cdot 1.0225 \cdot \ldots \cdot 1.0225 = \boxed{}$$

Y el "precio final", es decir, lo que acaba teniendo Fry en el año 3000, es:

$$P_f = \boxed{}$$

Haciendo la cuenta, aunque pueda parecer mentira, el resultado es que Fry tiene unos ____ de $. Todo el capítulo se basa en esta "propiedad" de las potencias. Que, básicamente, es que crecen muy rápido, aunque el primer término sea muy pequeño.

3.2. Repartos proporcionales

Es curioso, pero esta es una de las cosas a las que menos importancia se le da en matemáticas y, sin embargo, es de las más útiles. Cuando por ejemplo varios amigos participan, por ejemplo, en una quiniela, la mayor parte de la gente impone y necesita poner la misma cantidad cada uno. Y si de repente uno pone una cantidad diferente, se suele montar un follón. Todo es más sencillo con matemáticas.

Imagina que dos amigos ponen 2€ cada uno para una quiniela, y en total tocan 1000€. Es fácil, sale a ____ cada uno. Ahora, si el primero pone 1€ y el segundo pone 3€, ya no es tan fácil. Y, sin embargo, sale más o menos de cabeza. El segundo debe llevarse el triple que el primero, y en total salen 1000€. ____ el primero y ____ el segundo. No obstante, en la vida real los números no son siempre tan redondos.

3.2.1. Repartos directamente proporcionales

Ejemplo 1. Queremos repartir 3400€ entre tres amigos que han jugado a la quiniela. El primero ha puesto 2€, el segundo 5€ y el tercero 10€. ¿Cuánto le toca a cada uno?
Solución: calculamos la constante de proporcionalidad k (no confundir con índice de variación): $$k = \frac{Premio}{a+b+c+\cdots} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$ Multiplicamos k por cada una de las cantidades: $$A: 2k = \boxed{}€, \quad B: 5k = \boxed{}€, \quad C: 10k = \boxed{}€$$ Comprobamos: i) La suma da 3400€, como debe ser. ii) C se lleva el doble que B (ha puesto el doble), A menos de la mitad de B (ha puesto menos de la mitad), etc.

A veces, en cambio, interesa que sea al revés. Por ejemplo, si unos amigos limpian una casa y les pagan 100€ por ello, pero el primer amigo ha descansado una hora y el segundo 3 horas, es justo que el que ha descansado más se lleve menos, y al revés. Es decir, ahora el que ha descansado 1 hora se llevaría 75€, y el que ha descansado 3h se llevaría 25€. Justo al revés. Esto es un **reparto inverso**.

3.2.2. Repartos inversamente proporcionales

Ejemplo 2. Queremos repartir 1600€ inversamente entre tres amigos por un trabajo sabiendo que el primero ha faltado 2 días al trabajo, el segundo ha faltado 5 días y el tercero 10. ¿Cuánto recibe a cada uno?
Solución: calculamos la constante de proporcionalidad correspondiente **al inverso** de las cantidades, k $$k = \frac{Premio}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots} = \frac{1600}{\boxed{}} = \frac{1600}{\boxed{}} = \boxed{} = \boxed{}$$ Multiplicamos k por cada una de las cantidades: $$A: \boxed{}\boxed{}, \quad B: \boxed{} = \boxed{}, \quad C: \boxed{} = \boxed{}$$ Comprobamos: i) La suma da 1600€, como debe ser. ii) B se lleva el doble que C (ha puesto la mitad), A más de la mitad de B (ha faltado menos de la mitad), etc.

3.2.3. Proporcionalidad compuesta

En algunos casos puntuales, la proporcionalidad se puede llevar al extremo con los repartos compuestos. En general no es sencillo encontrar magnitudes realmente proporcionales. Recuerda que para que dos magnitudes sean proporcionales no basta con que cuanto más valga una, más valga la otra, sino:

- Cuanto mayor es una cantidad, $\boxed{}$ la otra.
- Si duplicamos una cantidad, **se** $\boxed{}$ **la otra**.

Y esta segunda condición ya descarta muchos casos reales, reduciendo la mayor parte a repartos simples, no compuestos. Por ejemplo:

Ejemplo 1: unos amigos van a poner un dinero para el regalo a un profesor. Determina si la magnitud "€ que pone cada uno" y "número de amigos" es directa o inversamente proporcional.

Vemos claramente que cuantos más amigos, $\boxed{}$ pone cada uno. Y estamos tentados a decir que son por tanto magnitudes inversamente proporcionales.

Ahora bien, supongamos que el regalo cuesta 36€ (un buen número, ya que tiene muchos divisores). Si somos 4 personas, pondremos 9€ cada uno. Sin embargo, si reducimos la cantidad a 2, pondremos 18€ cada uno.

Como siendo la mitad de gente, ponemos cada uno el doble, son **magnitudes inversamente proporcionales**. La tentativa era buena.

Ejemplo 2: estudiando 2 horas al día he conseguido un 8 en matemáticas. Determina si las magnitudes "tiempo estudiado" y "nota del examen" son directa o inversamente proporcionales.

Vemos claramente que cuantas más horas estudiadas, $\boxed{}$ nota. Sin embargo, si estudiando 2 horas al día he sacado un 8, si estudiase 4 horas diarias, ¿sacaría un 16?

Estas magnitudes son directas, en el sentido de que cuantas más horas más nota sacarás (en principio).

Pero no son **directamente proporcionales**, pues al doblar una no tiene por qué doblarse la otra.

No obstante, y dado que algunas magnitudes sí son claramente proporcionales, trabajaremos en los problemas con ellas. Y si no queda claro si es una cosa u otra, tira de imaginación. Pero sin ir de listo, claro…

Cuando intervienen varias magnitudes, hacemos una regla de tres compuesta. Para ello:

- **Se colocan las cantidades como una regla de tres, con la columna de la incógnita a la derecha.**
- **Se compara cada columna con la columna de la incógnita para saber si es directa o inversamente proporcional.**
- **Se plantea una ecuación como se indica en el ejemplo, dando la vuelta a las fracciones en caso de ser inversa, y dejándolas como están en el caso de ser directa.**

Ejemplo 3. Tenemos un prado con 30 vacas, que pueden sobrevivir 10 días usando 20 kilos de pienso. ¿Cuánto sobrevivirán 25 vacas, utilizando 40kg de pienso?

Solución

Colocamos las cantidades, con la columna de x a la derecha:

$$\begin{array}{ccccc} 30\ vacas & - & 20kg & - & 10\ días \\ 25\ vacas & - & 40kg & - & x\ días \end{array}$$

Comparamos.

- Cuantas más vacas, con el mismo pienso, menos días: inversa.
- Cuanto más pienso, con el mismo número de vacas, más días, directa

Planteamos la ecuación, colocando un igual en la columna de la x y dando la vuelta a las inversas:

$$\boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$$

Operamos:

$$\boxed{} = \frac{10}{x} \Rightarrow \boxed{} = \boxed{} \Rightarrow \boxed{x = \boxed{}\ días}$$

3.3. Interés simple y compuesto

Cuando depositamos dinero en un banco, este “juega con él”, a cambio de darnos un porcentaje del mismo. El banco gana, porque tiene el dinero de los clientes para poder operar con él, por ejemplo, en bolsa, y los clientes ganan, porque se les da lo que se llama un **rédito** (un porcentaje). El rédito es el porcentaje, digamos, anual, que recibe un cliente que ha puesto dinero en un banco.

Hay dos tipos de intereses bancarios: simple y compuesto. Posiblemente nadie usa ya el interés simple, aunque es más sencillo de entender. La informática beneficia mucho la práctica del interés compuesto.

3.3.1. Interés simple

El interés simple consiste en que el cliente, cuando pasa digamos un año, recibe el tanto por ciento fijado con el banco (el rédito), de la cantidad puesta. Retira los beneficios, y por tanto el segundo año volverá a recibir la misma cantidad. Por tanto, el interés simple consiste en calcular un porcentaje de la cantidad inicial, que llamaremos C. Y ese interés recibido será:

$$\boxed{I = \boxed{}}$$

Se suele poner en esta forma para acordarse de la nemotecnia “carrete”.

La única dificultad es que el tiempo t está en años (asumiendo que r es el porcentaje que nos da el banco al año), y si el problema lo pide en meses, hay que convertirlos a años.

Por lo demás, no tiene mucho misterio.

Llamando r al rédito (el porcentaje), el interés el primer año es:

$$I_1 = \boxed{} \cdot C = \boxed{}$$

Pero como todos los años es el mismo interés, solo tenemos que multiplicar por el número de años, que llamaremos t de tiempo, para calcular el interés simple total:

$$I = \boxed{}$$

Ejemplo 1: calcula el capital final que producen 1000€ al 5% de rédito en un banco durante 2 años.

$$I = \boxed{} = \boxed{}$$

Por tanto, el capital final será en total:

$$C_f = C + I \Rightarrow \boxed{C_f = \boxed{}}$$

Ejemplo 2: calcula el tiempo que debemos dejar 1000€ en un banco con un 2% de interés para duplicar nuestros ahorros.

En este caso nos pide el tiempo que tiene que pasar para que el interés sean otros 1000€ (1000+1000=2000, es decir, duplicar):

$$I = \frac{\boxed{}}{100} \Rightarrow \boxed{} = \frac{\boxed{}}{100} \Rightarrow \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = t \Rightarrow \boxed{t = \boxed{}\,años}$$

3.3.2. Interés compuesto

Lo normal es que, pasado un año, y recibido el interés correspondiente, este no se retire del banco. Sería molesto tener que pasar todos los años a recoger los 50 o 100€ que producen nuestros ahorros en el banco. Lo normal es que directamente se añade al capital, y el segundo año se hace la cuenta sobre el capital inicial más, digamos, esos 100€ de interés.

Ahora bien, esos 100€ de interés también general su propio interés, además de otros 100 que generarán de nuevo los 1000€. Y al segundo año ya no serán 100€ de interés, sino 110€. Y así sucesivamente.

El capital final obtenido resulta de la siguiente expresión, donde de nuevo r es el rédito que ofrece el banco, y t el tiempo, en años:

$$\boxed{\qquad\qquad}$$

Lo que hacemos aquí básicamente es aplicar el índice de variación, con una subida de un r por ciento, es decir, k vale:

$$k = 1 + \boxed{\quad}$$

Como aplicamos esta misma subida tantos años como hayan pasado, la k final será multiplicar esta por sí misma tantas veces como valga t, el tiempo. Es decir, elevándolo a t:

$$k = \boxed{\qquad}$$

Aplicando la fórmula $P_f = k \cdot P_i$, cambiando P de precio por C de capital, llegamos a:

$$C_f = \boxed{\qquad}$$

De nuevo, la única dificultad es que t está en años.

Ejemplo 1: calcula el capital final que producen 1000€ al 5% de rédito en un banco durante 2 años, con interés compuesto.

$$C_f = \boxed{\qquad} = \boxed{\qquad} = 1000 \cdot \boxed{\quad} = \boxed{\quad}\text{€}$$

Es decir, 2€ más que con interés simple.

Ejemplo 2: calcula el tiempo que debemos dejar 1000€ en un banco con un 2% de interés para tener 1020€, usando interés compuesto.

$$\boxed{\quad} = 1000 \cdot \left(\boxed{\quad}\right)^t \Rightarrow \boxed{\quad} = (\boxed{\quad})^t \Rightarrow \boxed{\quad} = (\boxed{\quad})^t$$

De donde claramente, $\boxed{t = \boxed{\,}\text{ año}}$

(El ejemplo está un poco forzado, pero es solo porque todavía no sabes manejar logaritmos. Cuando aprendas, se podrá hacer cualquier ejemplo de este tipo)

Con esto, podemos volver a hacer con esta forma el ejemplo de Fry del apartado anterior.

Bibliografía

- Imagen “Black Friday”: http://www.freepik.es/fotos-vectores-gratis/descuento
- Imagen 2º rebajas: http://www.karacol.es/segundas-rebajas-enero-2016
- Fry en el cajero: http://imgur.com/gallery/iR6hR
- Imagen quiniela: http://blogs.gamefilia.com/twiggymanson?page=2
- Imagen banco: http://www.freepik.es/vector-gratis/edificio-del-banco_789483.htm
-