S3. Tema5. Álgebra

5.1. Álgebra

El álgebra se usa cuando no se conoce algo y, sin embargo, se quiere operar con ello. Para ello, uno de las grandes utilidades de las matemáticas consiste en llamar x a aquello que no conocemos. Y, por supuesto, esto supone cientos de aplicaciones.

Mate magia

Resulta enormemente sencillo hacer "trucos" de magia usando las matemáticas. Por supuesto, aquí vamos a mostrar algunos trucos muy sencillos, pero podemos complicarlos (y, sobre todo, adornarlos) todo lo que queramos una vez que entendamos la primera parte básica.

La matemagia se resume en lo siguiente:

	Por ejemplo	Tu ejemplo	Con álgebra
Piensa un número	6		
Multiplícalo por 2	12		
Súmale 4	16		
Divide el resultado entre 2	8		
Súmale 8	16		
Restale el número pensado	10		
El resultado es 10	ok		

Prueba a buscar en internet o, lo que es mejor, crea algún problema usando esta misma estrategia. No es tan complicado como parece.

5.2. Igualdades notables

Uno de los pilares básicos del álgebra está en comprender que el cuadrado de una suma no es la suma de los cuadrados. Demostremos aquí las tres igualdades notables que ya sabemos de otros cursos. Lo haremos de dos formas: algebraicamente y gráficamente:

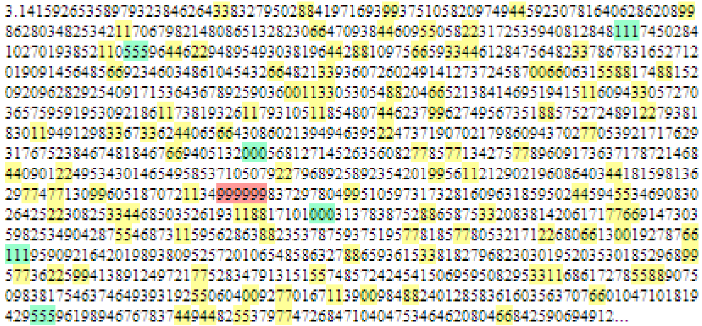
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$

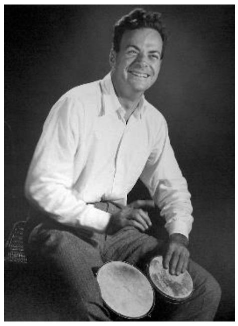
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

<u>Curiosidad</u>: cálculo de cuadrados de números parecidos a 50.
Resulta extremadamente sencillo saber que, por ejemplo, $52^2 = 2704$, o que $47^2 = 2209$.
El "truco" está en darse cuenta de que estos números son $(50+a)$ o $(50-a)$, elevado al cuadrado. Lo haremos en dos partes, por arriba y por abajo.

Si quieres intentar ir un paso más allá cuando domines esta técnica, prueba a calcular cuadrados de números cercanos a 500 o a 5000. No es lo mismo calcular el cuadrado de 49 de cabeza (que ya es espectacular), como calcular el de 498 (que es "más" espectacular). Prueba.

Richard Feynman y el "punto de Feynmann"

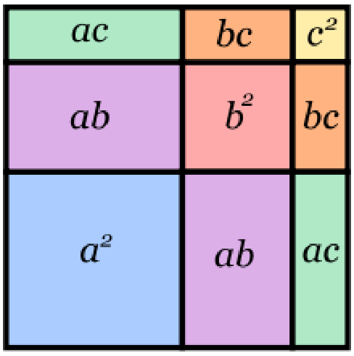




5.2.1. Otras igualdades notables

Aunque no es contenido del curso, puede aparecer de vez en cuando números elevados al cubo, o cuadrados de la suma de tres números. Por supuesto siempre tenemos la opción de hacerlo paso a paso, pero quizá conviene al menos una vez ver el desarrollo. En caso de tener que hacerlo, podemos recurrir a cualquiera de las dos formas.

Cuadrado de tres números



$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$
$+2(ab+bc+ca)$

Cubo de una suma

Fíjate en la regularidad. Tenemos a a la máxima potencia (3). El siguiente término a baja al cuadrado, mientras b sube a 1. El siguiente a baja a 1 mientras b sube al cuadrado. Y en el último a desaparece (elevado a 0), mientras b se queda a la máxima potencia.
Por otro lado, tenemos unos números delante. Fíjate lo que tienes a la derecha. No es difícil construir este triángulo, llamado **Triángulo de Tartaglia** o **Triángulo de Pascal**.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Por ejemplo, prueba a hacer los siguientes dos desarrollos:

$(a+b)^4 =$

$(a+b)^5 =$

5.3. Factor común

Una de las técnicas más importantes del álgebra es sacar factor común, que consiste en extraer factores repetidos de una suma o resta de términos:

$$2x^2 - 4x^3 = \boxed{}$$

Con esto, es muy sencillo simplificar algunas expresiones algebraicas. Hay que notar que, por supuesto, el valor del polinomio primero y el segundo debe ser el mismo para un valor de x determinado.

Ejemplo: Mark trabaja x horas a la semana en una empresa. Esta empresa le paga 6€multiplicado por las horas al cuadrado de 8 a 10 de la mañana, 12€ multiplicado por las horas al cubo de 10 a 12 de la mañana, 30€ multiplicado por x a la cuarta de 12 a 14 y 60 multiplicado por x a la seis de 14 a 20 de la tarde. a) Calcula la expresión del sueldo de Mark. b) Simplifica esta expresión sacando factor común c) Calcula lo que gana Mark trabajando 1 hora, y 2 horas, en ambos casos, y comprueba que es igual.	
a)	
b)	
C1) Con la expresión original:	C2) Con la expresión simplificada:

5.4. Operaciones con polinomios

Mira los vídeos S2.Polinomios para recordar cómo se operaba con polinomios. Después, haz la ficha de álgebra de repaso. Al acabar, prueba a hacer este ejercicio hasta llegar a la solución final:

$P(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x + 8$ $\qquad Q(x) = 3x - 4$ $\qquad R(x) = x^2 - 9x + 10$
Calcula: $P(x) - 3[Q(x)]^2 - Q(x) \cdot R(x) - x^2$
Solución: x
Prueba a calcular, por ejemplo, $P(1) - 3[Q(1)]^2 - Q(1) \cdot R(1) - 1^2$. Debería dar 1. Prueba a hacerlo con 2.

5.5. División de polinomios

La primera versión para dividir polinomios consiste en hacerlo con una caja, como hacías en primaria, para luego colocar el resultado de la siguiente forma:

$\begin{array}{c\|c} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$		$D = C \cdot d + R$ $\frac{D}{C} = d + \frac{R}{C}$

Esta sencilla operación, con números, la haremos ahora con polinomios. Fíjate paso a paso:

Colocamos los polinomios. Si es necesario, dejamos en el dividendo los huecos necesarios correspondientes al cero.	
Seleccionamos la x de mayor grado en el dividendo, y dividimos entre la x de mayor grado del divisor. En el ejemplo: $\frac{3x^4}{x^2} = 3x^2$	
Multiplicamos lo que tenemos en el cociente $(3x^2)$ por el divisor, y lo colocamos debajo del dividendo, ordenado (x^2 debajo de x^2, etc).	
Restamos. **Pon paréntesis y el signo fuera para no perderte**.	
Repetimos la operación con el resultado que nos ha quedado: $\frac{-2x^3}{x^2} = -2x$	
Volvemos a restar	
Y repetimos una vez más el proceso:	
Hemos acabado, pues el resto es de grado 1 y el divisor de grado 2. Ahora queda colocarlo correctamente. Fíjate en el ejemplo del principio con el 7/3	

Ahora tú (con división euclídea):

$a)\ \dfrac{4x^2-3x+1}{x-2}$
$b)\ \dfrac{3x^3-x+1}{x^2+3}$
$c)\ \dfrac{5x^4-3x^3+2x-3}{x^2+x-1}$

Soluciones:	$a)\ (4x+5)+\dfrac{11}{x-2}$
$b)\ (3x^2-9x+26)-\dfrac{77}{x+3}$	$c)\ (5x^2-8x+13)+\dfrac{-19x+10}{x^2+x-1}$

5.6. El teorema del resto

Cuando se realiza una división entre un polinomio de la forma $P(x):(x-a)$, existe un teorema que permite con mucha sencillez calcular el resto de la división. Ten en cuenta que en este caso, por sentido común, el resto tiene que ser un número. Dicho número será:

$$\boxed{P(x):(x-a) \Rightarrow R = P(a)}$$

Ejemplo: calcula el resto de la división $(2x^3-3x^2+1):(x-3)$
Ejemplo: calcula el resto de la división $(2x^3-3x^2+1):(x+1)$
Ejemplo: calcula k para que la siguiente división sea exacta: $(2x^3-kx^2+1):(x-3)$
Ejemplo: calcula k para que la siguiente división tenga resto 10: $(2x^3-kx^2+1):(x+2)$

Ejercicio1: calcula el resto de la división $(3x^5-2x^4+3x-1):(x-1)$
Ejercicio2: calcula el resto de la división $(2x^3-3x^2+167):(x)$
Ejercicio3: calcula k para que la siguiente división sea exacta: $(10x^5-kx^2+2k):(x-1)$
Ejercicio4: calcula k para que la siguiente división tenga resto 7: $(x^3-k^2x+2k):(x+1)$

Soluciones:
Ej1: 3; Ej2: 167; Ej3: -10; Ej4: -4 y 2

5.7. Ruffini

Existe una técnica para ahorrar muchos pasos a la hora de dividir entre polinomios de la forma $(x-a)$, que es el método de Ruffini. Este método consiste en lo siguiente:

Hagamos la división $\frac{x^3+2x^2+3x-1}{x-2}$ de dos formas distintas: con caja (división euclídea), y con Ruffini. Veremos que es esencialmente lo mismo, aunque la segunda forma es más rápida.

<table>
<tr><th>División Euclídea</th><th>Ruffini</th></tr>
<tr><td>$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+3x-1 & \underline{x-2} \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+3x-1 & \underline{x-2} \\ \ominus\,(x^3-2x^2) & x^2 \\ \hline 4x^2+3x-1 & \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+3x-1 & \underline{x-2} \\ \ominus\,(x^3-2x^2) & x^2+4x \\ \hline 4x^2+3x-1 & \\ \ominus\,(4x^2-8x) & \\ \hline 11x-1 & \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+3x-1 & \underline{x-2} \\ \ominus\,(x^3-2x^2) & x^2+4x+11 \\ \hline 4x^2+3x-1 & \\ \ominus\,(4x^2-8x) & \\ \hline 11x-1 & \\ \ominus\,(11x-22) & \\ \hline 21 & \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$x^3+2x^2+3x-1=$
$=(x-2)(x^2+4x+11)+21$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">La división, por tanto, será:
$\frac{x^3+2x^2+3x-1}{x-2}=$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fíjate en las similitudes. En el fondo estamos haciendo lo mismo, pero así es mucho más sencillo y más “limpio”. Prueba tú.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Realiza la siguiente división usando Ruffini. Ten cuidado con los ceros:
$\frac{2x^4-3x^2+x-5}{x+1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Solución: $(2x^3-2x^2-x+2)-\frac{7}{x+1}$</td></tr>
</table>

5.8. Factorizar polinomios y raíces

Una raíz a es aquel número que hace que el polinomio valga cero. Es decir:

$$\boxed{a \text{ es raíz de } P(x) \quad \text{si} \quad P(a) = 0}$$

Una vez tenemos las raíces de $P(x)$, podemos descomponer factorialmente el polinomio, como hacíamos con los números (por ejemplo $12 = 2^2 \cdot 3$), de forma que si a, b, c … son las raíces de $P(x)$ entonces:

$$P(x) = m(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \ldots$$

Donde m es el coeficiente del término mayor de $P(x)$. Veamos unos ejemplos muy sencillos:

Ejemplo: factoriza el polinomio $P(x) = x^2 + 2x - 8$
Ejemplo 2: factoriza el polinomio $P(x) = 4x^2 - 16$
Ejemplo 3: factoriza $P(x) = 3x^2 - 6x + 3$

Ahora que ya manejamos la idea general de factorización y de raíces, pasemos al caso más general, en que tengamos polinomios de grado superior. Sigue los pasos uno a uno.

Ejemplo1: factoriza e indica las raíces de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

Fíjate que hemos empezado el problema haciendo Ruffini con 2. Sin embargo, ¿qué habría ocurrido si lo hacemos con cualquiera de las otras raíces? En teoría, debería quedar igual. Comprobémoslo:

Ejemplo2: factoriza e indica las raíces de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

Ejemplo3: factoriza e indica las raíces de $P(x) = 2x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 12x^2$

Prueba tú. Factoriza $P(x) = 3x^4 - 9x^2 + 6x$. Ten cuidado con los ceros, ya que no hay término en x^3. Indica también **siempre** las raíces cuando acabes.
Solución: $P(x) = 3x(x+2)(x-1)^2, raices P(x) = \{-2, 1\ (doble), 0\}$

5.9. Simplificación de fracciones algebraicas

Vamos a intentar simplificar fracciones, pero desde este nuevo punto de vista. Para ello, deberemos seguir los pasos uno por uno. Fíjate lo que hacías en cursos anteriores con números:

Paso 1: descomponer en factores primos	
Paso 2: propiedades de potencias	
Paso 3: "simplificar", o propiedades de potencias	

Ahora haremos algo parecido, pero con polinomios. Ve siguiendo los pasos uno a uno. Haremos dos ejemplos, uno sencillo para entender el concepto y uno un poco más complicado:

Ejemplo 1: simplifica la fracción $\frac{2x^4-2x^3-12x^2}{6x^3-24x}$	
Paso 1: sacamos el mayor factor común posible tanto en numerador como en denominador.	
Paso 2: si el grado del polinomio que queda es 3 o superior, utilizamos Ruffini para descomponer. No es el caso, saltamos al paso 3.	
Paso 3a: hacemos Ruffini hasta que el grado sea 2. En este caso, comprobamos si hay alguna igualdad notable. En nuestro caso hay una en el denominador. La factorizamos.	
Paso 3b: el resto de polinomios de segundo grado los descomponemos con la ecuación de segundo grado: $x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$	
Paso 4: una vez factorizados al máximo los polinomios, podemos eliminar los términos iguales. En este caso, vemos que hay un 2 y un 6 en numerador y denominador, que se simplificarán. También hay una x^2 en el numerador y x en el denominador, que se irán. También un factor $(x+2)$ en ambos lados.	

Ejemplo 2: simplifica la fracción $$\frac{10x^5 - 30x^3 + 20x^2}{2x^7 - 2x^5}$$	
Paso 1: sacamos el mayor factor común posible tanto en numerador como en denominador.	
Paso 2: si el grado del polinomio que queda es 3 o superior, utilizamos Ruffini para descomponer. Es el caso en el numerador. Probamos con $x = 1$, y al ser cero, hemos encontrado una raíz.	
Paso 3: el resto de polinomios de segundo grado los descomponemos con la ecuación de segundo grado (numerador) o con igualdades notables (denominador): $$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$	
Paso 4: una vez factorizados al máximo los polinomios, podemos eliminar los términos iguales. En este caso, vemos que hay un 2 y un 6 en numerador y denominador, que se simplificarán. También hay una x^2 en el numerador y x en el denominador, que se irán. También un factor $(x + 2)$ en ambos lados.	

Prueba tú. Promesa: cuando hay que hacer Ruffini, siempre sale con 1 o con −1.

Ejemplo 1: simplifica: $\frac{x^2-9}{2x^4-2x^3-10x^2-6x}$	Ejemplo 2: simplifica: $\frac{3x^6-3x^5-9x^4+15x^3-6x^2}{6x^4+12x^3-6x^2-12x}$

Soluciones:

$$a)\, \frac{x+3}{2x(x+1)^2}\,, \qquad b)\, \frac{x(x-1)^2}{2(x+2)}$$

5.10. Operaciones con fracciones algebraicas

En este apartado vamos a repetir algunos conceptos básicos de operaciones con fracciones. Si los tienes claros, no te resultará difícil sobrellevar este tema. Fíjate:

$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$	Para sumar o restar fracciones, se hace el mcm. Para hacer el mcm, se factorizan los denominadores. Se escogen los comunes y no comunes al máximo exponente.	$\frac{1}{2^2}+\frac{5}{2\cdot 3}=\frac{3}{2^2\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{2^2\cdot 3}$ $=\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=\frac{13}{12}$
$\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}$	Para multiplicar fracciones, se multiplican los numeradores y los denominadores. Aunque, si se puede simplificar antes, se simplifica.	$\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$ O mejor aún: $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$
$\frac{2}{3}:\frac{10}{9}$	Para dividir fracciones, se da la vuelta a la segunda fracción, y se convierte en multiplicación.	$\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}=\frac{3}{5}$

Pues bien, lo mismo que hemos hecho con números, ahora lo haremos con álgebra. Es un poco más complicado, pero básicamente lo mismo. Haremos varios ejemplos.

Ejemplo 1. Opera:

$$\frac{2x}{x+1}-\frac{x-1}{x}$$

Como el factor $(x+1)$ y el factor x no tienen nada en común, el mcm es el producto de ambos.

En la primera fracción, quedará Al dividir el "nuevo denominador" entre el antiguo, $(x+1)$, obviamente quedará x, que habrá que multiplicar por el numerador:

En la segunda fracción, quedará Al dividir el "nuevo denominador" entre el antiguo, x, obviamente quedará $(x+1)$, que habrá que multiplicar por el numerador:

Juntándolo todo:

$$-$$

Juntamos denominadores, como en fracciones normales, y operamos:

$$= \quad =$$

Ahora tenemos una fracción algebraica. No obstante, para que se pudiese simplificar más, el numerador tendría que ser divisible entre x (es decir, cumplir el teorema del resto con $P(0)=0$, que no es el caso), o ser divisible entre $(x+1)$, es decir, cumplir el teorema del resto con $a=-1$:

$$P(-1)=-(-1)^2+2\cdot(-1)+1=-1-2+1=-2\neq 0$$

Como no va a ser divisible por $(x+1)$ tampoco, podemos dejarlo así.

Ejemplo 2. Opera: $$\frac{x+1}{x}-\frac{2x}{x^2-x}+\frac{1}{x^2}$$
Factorizamos denominadores (factor común, igualdades notables...) $$\frac{x+1}{x}-\square+\frac{1}{x^2}$$ Fíjate que podemos simplificar ya la segunda fracción, quitándonos parte del trabajo de encima. Lo mismo que ocurría con fracciones con números: $$\frac{x+1}{x}-\square+\frac{1}{x^2}$$ Ahora, hacemos el mcm. Tenemos el factor x y el x^2. Son el mismo factor, así que nos quedamos con el de mayor grado, x^2. El factor $x-1$ no es común a ninguno más: $$\square-\square+\square$$
Juntamos fracciones y operamos. Recuerda que esto no es una ecuación, así que **no se van los denominadores**: $$\frac{\square}{x^2(x-1)}=\frac{\square}{x^2(x-1)}=\square$$
Para seguir simplificando, el numerador debería ser divisible entre x. Por el teorema del resto, no lo es. Probamos a ver si es divisible entre $x-1$. Si lo es, $P(1)=0$: $$P(1)=1^3-2\cdot1^2-1=-2\neq0$$ Por tanto, ya hemos acabado.

Ejemplo 2. Opera: $$\frac{x+1}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x^2}-\frac{2x-1}{x+3}:\frac{x^2-2x}{x^2-9}$$
Ahora el primer paso será hacer las multiplicaciones y divisiones. No obstante, **nunca las hagas**, déjalas indicadas, pues así tendrás ya parte de la factorización: $$\square$$
Ahora, factoriza cada uno de los trozos factorizables que te han quedado (marcados en rojo). Por fortuna son todos factor común o igualdades notables: $$\square$$
Antes de seguir intenta simplificar cada fracción, que se puede: $$\square$$
Para seguir, haz el mcm. Fíjate que el factor x está repetido. Tomamos el x^2, que es el de mayor exponente. Lo mismo ocurre con $(x-2)$, pero son iguales: $$\square$$

Juntamos denominadores y operamos:
Por último, comprobamos con el teorema del resto si fuese posible seguir factorizando. $P(0)=1\neq 0$, uno descartado. Por otro lado $$P(2)=-2\cdot 8+7\cdot 4-2\cdot 2+1=-16+28-4+1\neq 0$$ Por tanto, ya hemos acabado.

Prueba tú

Ejemplo 2. Opera: $$\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{2}{x^2-1}\cdot\frac{4x^2+4x}{8x}+\frac{x-3}{x^2}:\frac{x^3-9x}{2x^3-2x^2}+\frac{x-5}{x(x-1)(x+3)}$$
Solución: $\frac{2}{x-3}$

Bibliografía

- Igualdades notables: http://matematicas-almudena.blogspot.com.es/2011/12/identidades-notables.html
- Richard Feynmann: https://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/feynman/
- Triángulo de Pascal: http://aulatallerccb.weebly.com/triaacutengulo-de-pascal.html