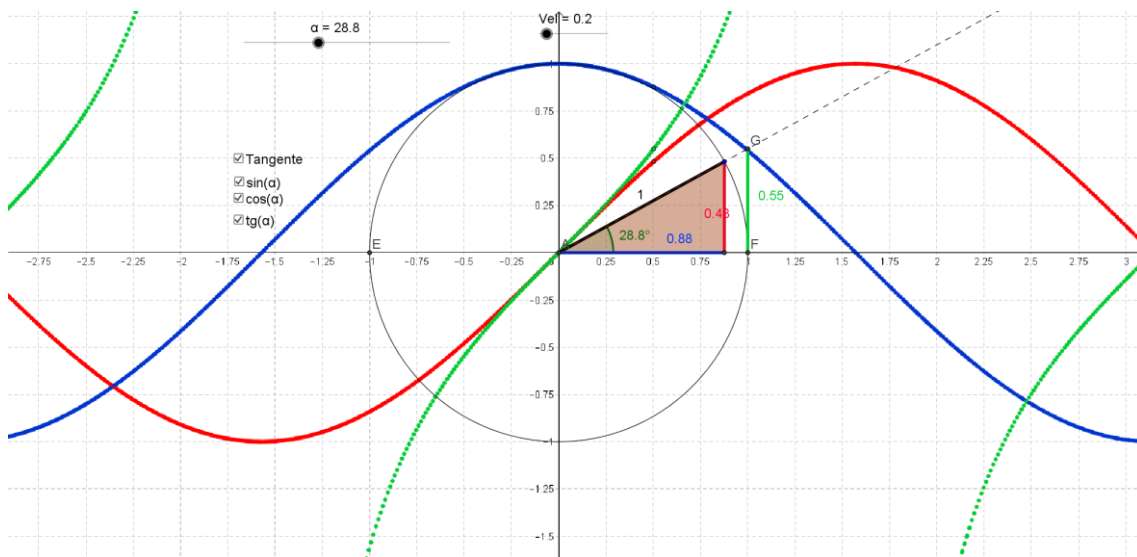


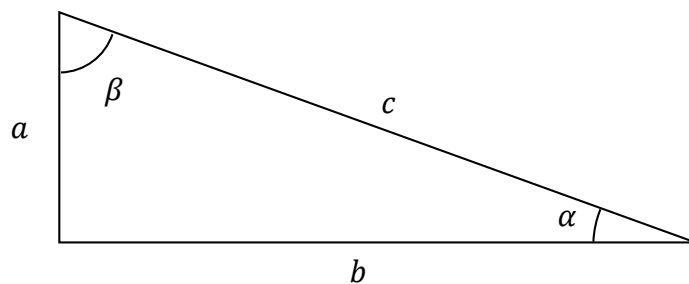
## Manual Geogebra S4.1. Trigonometría

En este manual vamos a explorar las opciones de geogebra para construir la mayor cantidad de información de trigonometría en el mismo gráfico. El resultado final debe ser algo como sigue. ¿Te atreves a intentarlo sin leer el manual?



### 1. [La circunferencia goniométrica](#)

Como bien es sabido, la trigonometría se basa en un triángulo rectángulo, siendo el seno y coseno la relación entre los catetos adyacente y opuesto con la hipotenusa:



Pues bien, tal y como tenemos el dibujo, se definen las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  como:

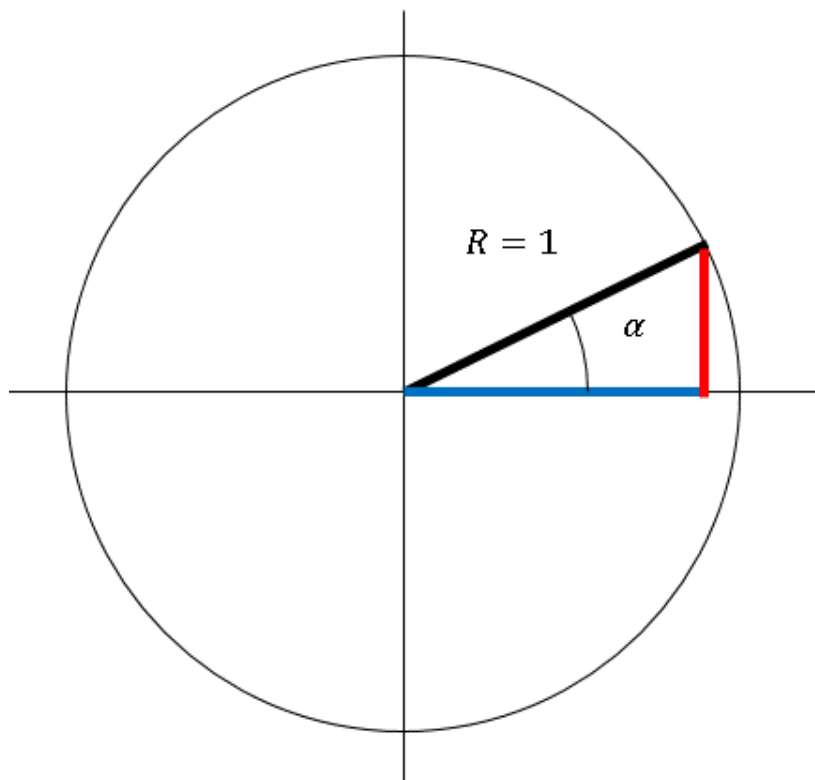
$$\boxed{\boxed{\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}}$$

$$\boxed{\boxed{\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}}}$$

$$\boxed{\boxed{\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}}} = \frac{\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}} \Rightarrow \boxed{\boxed{\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}}}$$

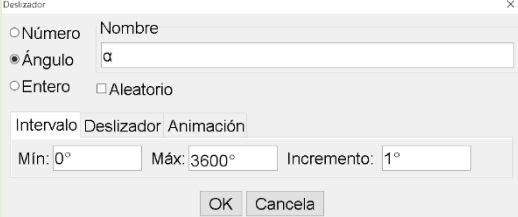
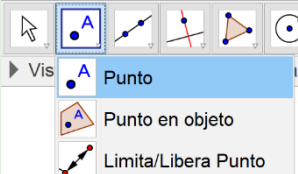
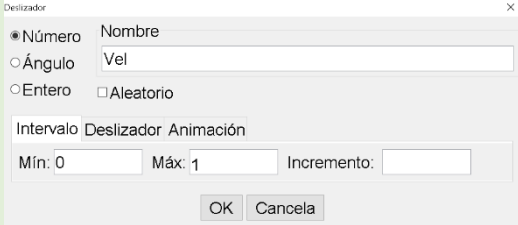
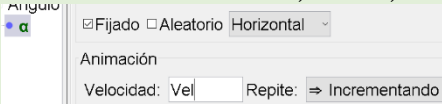
Lo cual se lee “*el seno de  $\alpha$  es el cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  dividido por la hipotenusa*”, “*el coseno de  $\alpha$  es el cateto adyacente al ángulo  $\alpha$  dividido por la hipotenusa*”, y “*la tangente del ángulo  $\alpha$  es el cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  dividido por el cateto adyacente a dicho ángulo*”.

Ahora bien, una buena herramienta para trabajar es la circunferencia goniométrica, que no es más que una circunferencia de radio 1. De esta forma, cualquier triángulo que formemos como en la figura, mostrará directamente el seno y coseno como catetos:



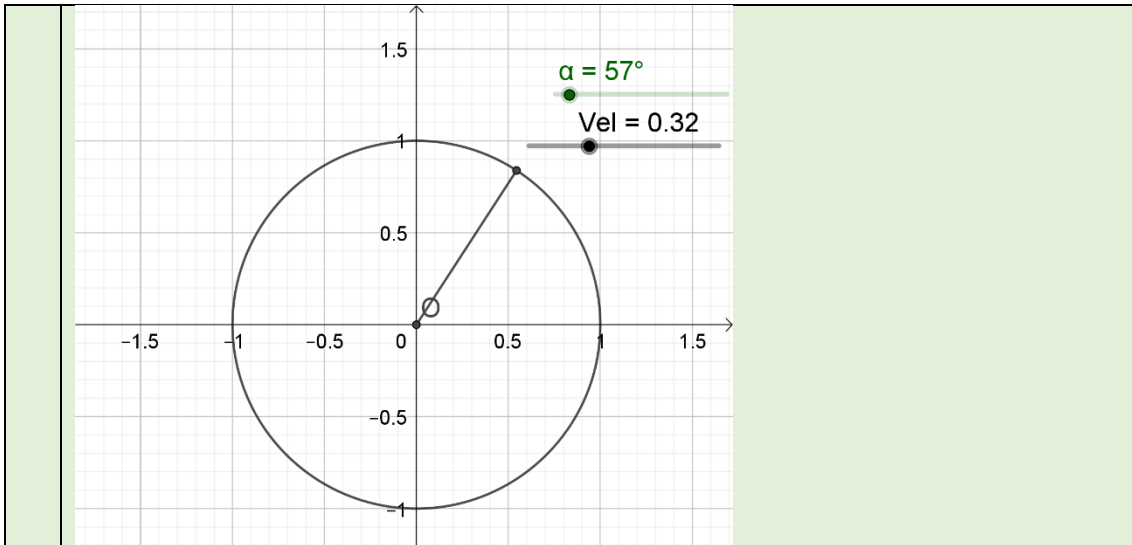
Vamos a construir esta circunferencia:

<p>Coloca un punto en el origen de coordenadas, y nómbralo como O (de origen). A continuación, con la herramienta “Circunferencia dado el centro y el radio”, crea una circunferencia de radio 1. Amplía el lienzo hasta que te quede como en la imagen:</p> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <ul style="list-style-type: none"> <li> Circunferencia (centro, punto)</li> <li style="background-color: #add8e6;"> Circunferencia (centro, radio)</li> <li> Compás</li> </ul> </div>	
--	--

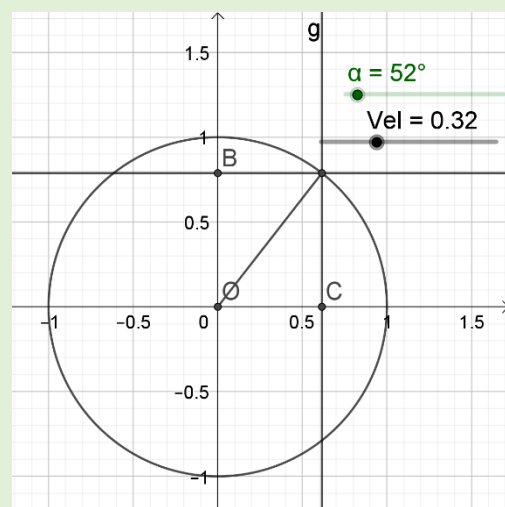
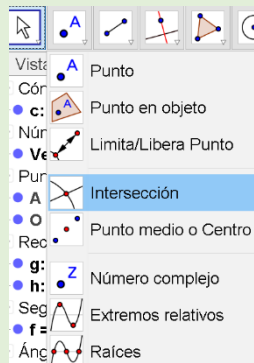
	<p>Crea un deslizador llamado <math>\alpha</math> como en la imagen. Vamos a darle 720 grados para que pueda dar 2 vueltas completas, incremento 1, y en “Animación” selecciona la opción “Oscilante” para que siempre crezca:</p> 
	<p>Ve a la herramienta <b>punto</b> (justo a la izquierda de las rectas), y coloca un punto donde quieras. El punto por defecto se llama C (porque ya ha usado A y B). Puedes cambiarle el nombre si quieres a O (de origen), pulsando dos veces y yendo a <b>propiedades</b>. También puedes ahí cambiar el color o hacerlo más grande.</p> 
	<p>Crea un segundo deslizador llamado “Vel” que marcará la velocidad del primero. Usa los siguientes parámetros:</p> 
	<p>Ahora haz doble click en el deslizador <math>\alpha</math> y cambia el parámetro “Velocidad”, poniendo el nombre del otro, “Vel”, como sigue:</p> 
	<p>Prueba a animar el deslizador <math>\alpha</math> (botón derecho: animación automática), y a cambiar el valor del deslizador “Vel”.</p>

Vamos a crear ahora un punto cualquiera de la circunferencia, el seno y el coseno.

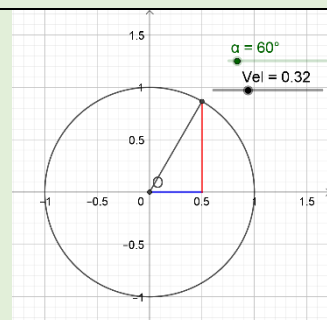
	<p>Escribe en la barra de entrada lo siguiente:</p> $A = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ <p>Y pulsa ENTER. Se habrá creado un punto que estará siempre encima de la circunferencia. Piensa por qué.</p>
	<p>Crea un segmento que una el centro O con este punto A, y borra todas las etiquetas:</p>



Crea una perpendicular sobre el eje X que pase por A, y otra igual sobre el eje Y. Busca las intersecciones de estas rectas con los ejes con la herramienta “Intersección”:



Ahora, crea dos segmentos OC, y AC, y pntalos, de forma que el vertical (el seno) sea rojo, y el horizontal (coseno) sea azul. Oculta todas las líneas auxiliares que no sirvan en este momento. Ya tenemos el seno y el coseno.



Pasemos ahora a la tangente.

Para la tangente, necesitamos lo siguiente:

- Una línea que prolongue el segmento que hace de radio de la circunferencia (recta que parte de O y con un punto en A)
- La intersección de la circunferencia con el eje X, que serán los puntos D y E.
- Una perpendicular al eje X desde E, que intersecará a la recta anterior.

Con todo esto, lo siguiente será:

- Intersección de la recta OA con la perpendicular al eje X que pasa por E.
- Segmento que une a este último punto, F, con E, que pintaremos de verde.
- También colocaremos la recta OA con estilo punteado.
- Limpiaremos la zona ocultando lo que sobre:

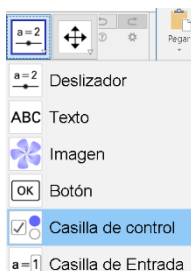
Pulsando con el botón derecho en cada segmento (rojo, azul y verde), ve a propiedades y selecciona, en vez de “Nombre”, la opción “Valor” para que marque cuánto vale cada uno en cada momento.

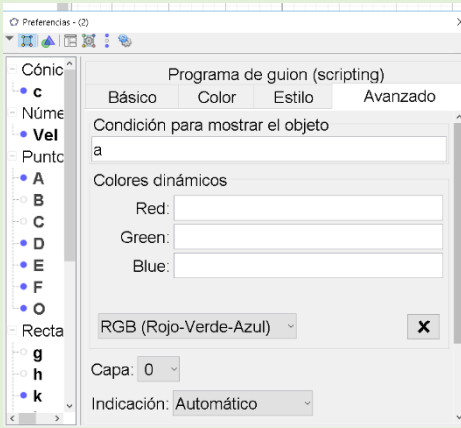
Prueba ahora a animar el deslizador. Verás cómo se modifican los parámetros a través de las líneas dibujadas. Prueba a responder a las siguientes preguntas:

- ¿En qué cuadrantes el seno y el coseno son positivos y negativos?
- ¿En qué cuadrantes es la tangente positiva y negativa?
- ¿Qué le ocurre al seno y coseno a medida que nos acercamos a  $0^\circ$ ?
- ¿Y a  $45^\circ$ ?
- ¿A  $90^\circ$ ?
- ¿A  $180^\circ$ ?
- ¿A  $270^\circ$ ?
- ¿Qué le ocurre a la tangente a medida que se acerca a  $90^\circ$ ? ¿Y a  $0^\circ$ ? ¿Y a  $270^\circ$ ?
- ¿En qué lugares el seno y coseno son iguales?
- ¿Cuándo la tangente vale 1? ¿Y  $-1$ ?
- A medida que el ángulo se va haciendo más pequeño ocurre un fenómeno muy curioso: el seno y la tangente son prácticamente iguales. Compruébalo con valores del seno muy pequeños, de entre  $0$  y  $5^\circ$ .

## 2. Ocultar elementos a voluntad

Existe una herramienta en geogebra que permite visualizar solo aquellos elementos que necesitamos, la **casilla de verificación**.

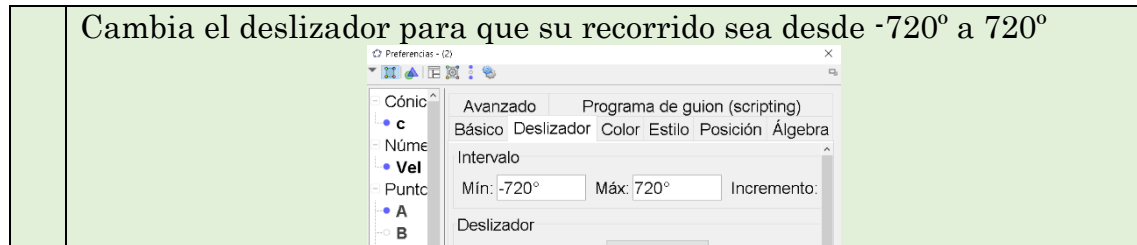


	<p>Coloca tres de estas casillas y etiquétalas como “seno”, “coseno” y “tangente”. Aunque se puede directamente seleccionar qué elementos controlan, nosotros lo haremos manualmente “a posteriori”. Para ello selecciona con el botón derecho la línea que controla el seno (la roja), y ve a “propiedades”.</p>
	<p>En <b>Avanzado</b>, escribe en la casilla “Condición para mostrar el objeto” el nombre de la primera de las casillas de verificación, que por defecto es “a”. Pulsa “Aceptar”:</p> 
	<p>Haz lo mismo con la del coseno (probablemente llamada “b”), y la de la tangente (probablemente llamada “d”, aunque mira el nombre antes de entrar en propiedades). Para la tangente, haz lo mismo con la línea punteada auxiliar y el punto F.</p>

Ya tenemos las funciones trigonométricas básicas, que además podemos poner y quitar.

### 3. Funciones trigonométricas

Por último, vamos a dibujar también sobre el mismo gráfico las funciones trigonométricas. Para ello es interesante que nuestro deslizador admita también números negativos, así que lo primero que haremos será cambiarlo:



Ahora crearemos nuevas casillas de verificación y las variables oportunas. No vamos a dibujar tal cual las funciones (cosa que podría hacerse directamente en la barra de entrada), sino un punto que recorra el espacio:

	<p>Crea tres nuevas casillas de verificación llamadas “sen(x)”, “cos(x)” y “tg(x)”. Déjalas en blanco por ahora.</p>
	<p>Escribe en la barra de entrada:</p> $F_{sen} = (\alpha, sen(\alpha))$ $F_{cos} = (\alpha, cos(\alpha))$ $F_{tg} = (\alpha, tg(\alpha))$
	<p>Pinta los tres puntos del color correspondiente a sus respectivos segmentos, a saber: el seno de rojo, el coseno de azul y la tangente de verde. Activa el rastro de los tres puntos.</p>
	<p>En las propiedades de cada punto, usa la opción “Avanzado”, “Condición para mostrar el objeto” para indicar que se vean con los deslizadores antes creados.</p>

Es hora de probar la aplicación.

Prueba incluso a hacer zoom para ver bien las funciones desde lejos. Activa el deslizador  $\alpha$  con una velocidad cualquiera y observa qué ocurre. Debería quedar algo como lo siguiente:

