S3. Tema2

2.1. Potencias

La teoría: propiedades de las potencias.	
1. Producto de potencias de **misma base**: se suman exponentes.	
2. División de potencias de **misma base**: se restan exponentes.	
3. Potencia de una potencia: se multiplican exponentes.	
4. Cualquier número elevado a cero es 1.	
5. Producto de potencias de mismo exponente, se multiplican las bases.	
6. División de potencias de mismo exponente, se dividen las bases.	
7. Exponente negativo se da “la vuelta” a la potencia: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	

Demostraciones:

Curiosidad: usando potencias, vamos a doblar un papel varias veces. Primero mediremos el grosor de un folio. Como es casi imposible medir un solo folio, nos fijamos que un paquete de 500 folios mide unos de alto, por tanto:

$$\frac{5cm}{500 folios} = \frac{1}{100}\frac{cm}{folio} = 0.01\frac{cm}{folio} =$$

Es decir, la décima parte de un milímetro.

Ahora que ya lo sabemos, observemos lo siguiente: si doblamos un folio a la mitad, tendremos el doble de grosor. Si volvemos a doblarlo, 4 veces. Si lo hacemos una tercera vez, 8 veces, etc.
En general, tendremos veces el grosor del folio, donde n es el número de veces que lo hemos doblado.
Fíjate que si lo doblamos $0\, veces$, tenemos , es decir, una vez el grosor original. Obviamente.
Ahora, calcula lo que ocurriría al doblar el folio veces. Usando la calculadora (en Google, puedes escribir 2^50, y lo que te quede multiplicarlo por 0.0001 o, directamente, escribe $0.0001 * (2\text{^}50)$).
La distancia de la Tierra al Sol es de 150 millones de km, es decir:

$$150M\, km = 150 \cdot 10^6\, km = 150 \cdot 10^9 m =$$

Saca tus propias conclusiones…

2.2. Radicales

Se entiende por radical el conjunto radicando e índice, cuyo resultado, si existe, se llama raíz.

$$\sqrt[n]{a} = b$$

La teoría básica de los radicales es que, cualquiera de ellos, puede escribirse como potencia:

Por tanto todas las propiedades de los radicales en realidad son también las de las potencias. Fíjate que el cuadro de debajo no deja de ser un **copia y pega** del anterior, aunque hemos quitado algunas cosas que sobran:

La teoría: propiedades de los radicales.	
1. Potencia de un radical: se eleva el radicando: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	
2. Producto de radicales de mismo índice, se multiplican las bases.	
3. División de radicales de mismo índice, se dividen las bases.	
4. Radical elevado al índice: el resultado es el radicando[1]: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	
5. Para hacer la raíz de una raíz, se **multiplican** los índices:	

[1] Estrictamente hablando, salvo que ocurra uno de estos casos:
- Si el índice es y el radicando es , **no se puede calcular**, por más que se eleve al mismo número: **cero soluciones.**
- Si el índice es par y el radicando es positivo, **da dos soluciones**:

En este tema trataremos generalmente solo con la solución positiva, al estar los radicales dentro de operaciones, pero este hecho puede ser importante.

Demostraciones:

2.2.1. Extracción de factores de un radical

Basándonos en las propiedades anteriores, podemos simplificar radicales extrayendo factores fuera (o introduciendo factores dentro). Para ello veamos la siguiente demostración:

Ahora, la demostración de que $\sqrt[3]{2^7} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2}$
Empecemos por agrupar los factores de la siguiente manera, cosa que podemos hacer por propiedades de potencias:

$$\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2}$$

Ahora, sabemos que **la raíz de un producto es el producto de las raíces**:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15} \Leftrightarrow \sqrt{15} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$$

Por tanto podemos separarlo en tres partes:

$$\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2}$$

Sabemos también que elevar un radical al índice da como resultado el radicando, o lo que es lo mismo, hacer la raíz cúbica de un número elevado al cubo da ese mismo número:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

Por tanto los dos primeros factores son directamente el radicando:

$$\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

Y ya lo tenemos "demostrado":

$$\sqrt[3]{2^7} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

Fíjate que en estos casos escribimos el $\cdot$ entre el coeficiente y la raíz. Esto es muy útil para distinguir entre $2^3 \cdot \sqrt{7}$ y $2 \cdot \sqrt[3]{7}$. Al escribirlo junto es mucho más complicado y puede llevar a errores: $2^3\sqrt{7} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{7}$

Más que una curiosidad, esto es una necesidad. No creas lo que se te dice a la primera, **compruébalo tú mismo antes**. Para ello, toma una calculadora, y haz $\sqrt{8}$ y $2\sqrt{2}$ (el doble de la raíz de 2). En teoría deberían ser iguales, pues $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$.
Pero compruébalo para que te lo creas del todo.

Curiosidad: calcular raíces es generalmente complicado. Sin embargo, hay algunos trucos que nos permiten cálculos muy sencillos. Es el caso de los derivados de $\sqrt{2}$.
Intenta memorizar que $\sqrt{2} \approx 1.4142$. No es difícil, y no tendrás que memorizar más.
Para calcular $\sqrt{8}$, podemos hacer lo siguiente:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

Es decir, es simplemente el doble de $\sqrt{2}$, que de cabeza es

Lo mismo ocurre por ejemplo con $\sqrt{200}$:

$$\sqrt{200} = \sqrt{2 \cdot 10^2} = 10\sqrt{2}$$

Es decir, basta desplazar la coma hacia la derecha: $\sqrt{200} =$

Con esto es fácil quedarse con la gente. Aparentemente acabas de calcular una raíz irracional, de cabeza, y con tres o cuatro decimales…

Ahora, haciendo uso de esto, podemos operar con radicales en operaciones combinadas, simplificando. Veamos el siguiente ejemplo, con pasos:

	$\sqrt{20}-\frac{2}{3}\sqrt{5}-\sqrt[3]{5}+2\sqrt{45}+4\sqrt[3]{40}$
Paso 1: factoriza todos los radicales en factores primos.	
Paso 2: extrae factores fuera. **Usa el · para no confundirte**.	
Paso 3: opera los coeficientes	
Paso 4: suma aquellos radicales que sean iguales, como si el radical fuese una x. Vamos a hacerlo de tres formas: como está, cambiando los radicales por letras, y sacando factor común.	

Por último, hagamos algunas operaciones de raíces de raíces.

Ejemplo: opera $\sqrt{3^{10}\cdot\sqrt{3^5}}\cdot\sqrt[5]{3^3\cdot\sqrt{3}}$

Aunque hay muchas formas de hacerlo, quizá lo más cómodo primero es introducir los factores en las raíces de dentro:

$$\sqrt{\sqrt{3^{20}\cdot 3^5}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{3^6\cdot 3}}$$

El segundo paso, al tener raíces de raíces, es multiplicar los índices. También podemos operar el radicando, pues son productos de potencias:

No es estrictamente necesario, pero fíjate que el primer radical se puede simplificar. No hay más que darse cuenta de que:

Y, aunque en el siguiente paso, podríamos dedicarnos a extraer factores fuera, es mejor directamente que operemos los radicales.

No podemos multiplicar los radicandos, porque los índices son diferentes, pero sí podemos hacer el **mínimo común múltiplo** de los índices (de 3 y 5, es decir, 15), de la forma siguiente:

De forma que, ahora:

Si en este último paso pudiese simplificarse, se haría, pero 15 y 271 son primos entre sí.

Lo que sí podemos hacer es sacar factores fuera. Cada 15, sale uno fuera. Es mejor hacer la división en casos como este (división con resto, la de la caja):

Es decir, podemos hacer 18 paquetes, y sobraría 1. Por tanto:

Curiosidad: algunas veces ocurren cosas extrañas. Fíjate en este número z:

$$z = \sqrt{4-\sqrt{12}} - \sqrt{4+\sqrt{12}}$$

Sabemos que $\sqrt{12}$ es irracional. A fin de cuentas $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$, y $\sqrt{3}$ es irracional.
Por tanto, al sumarle 4 y luego volver a hacer la raíz, seguro que sigue siendo irracional. ¿No?
La realidad es que el número z puesto arriba no es irracional. Ni siquiera es decimal. Es un número natural. Concretamente es 2. ¿Sabrías cómo demostrarlo?
(¿No te lo crees? Mete este número en Wiris, Wolfram o en tu calculadora)

Si quieres, prueba a demostrar (aunque son números más complicados), que el siguiente número también es natural:

$$z = \sqrt{10-\sqrt{96}} - \sqrt{10+\sqrt{96}}$$

2.2.2. Racionalizar

Racionalizar consiste en quitar las raíces del denominador de una fracción. Sin embargo, el objetivo es **hacer alguna operación de tal forma que no se modifique el resultado.**

Aunque parezca algo inútil, en un futuro tendrá su utilidad. Distinguimos tres casos.

Raíces simples: $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Para quitar la raíz cuadrada de un denominador, simplemente multiplicamos y dividimos la fracción por dicha raíz, aprovechando que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.
Por supuesto, si es posible, simplificamos.

Ej: racionaliza $\frac{1}{\sqrt{3}}$	Ej: racionaliza $\frac{4}{\sqrt{8}}$ Tenemos dos opciones: factorizar el 8 o no hacerlo:	Ej: racionaliza $\frac{xy^2}{3\sqrt{x}}$

Denominador con suma de términos: $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$ o bien $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$	
Aprovecharemos la igualdad notable $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$. Por ello, multiplicaremos y dividiremos por **el conjugado**, que es la misma suma o resta, pero cambiado de signo. Si se puede, simplificamos.	
Ej: racionaliza $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$	Ej: racionaliza $\frac{3\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}$

Denominador con raíces no cuadradas $\frac{a}{\sqrt[n]{x^m}}$	
Multiplicaremos por $\sqrt[n]{x^?}$, donde ? será lo que nos falte hasta llegar a n. Por ejemplo si tenemos $\sqrt[10]{x^3}$, multiplicaremos por $\sqrt[10]{x^7}$, para tener así $\sqrt[10]{x^{10}}$, que es x	
Ej: racionaliza $\frac{7}{\sqrt[5]{3^2}}$	Ej: racionaliza $\frac{3}{\sqrt[10]{3^{13}}}$

Y ¿para qué vale esto?

Veamos el siguiente ejemplo, en el que simplemente tenemos una suma:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Aparentemente no se pueden sumar. Sin embargo, podemos aplicar propiedades de raíces para hacer:

Y a continuación racionalizar:

Y ya podemos operar normalmente:

Mucho más elegante…

2.3. Notación científica

Cuando trabajamos con cantidades muy grandes o muy pequeñas, resulta un verdadero jaleo interpretar ceros. De hecho, el cerebro humano se confunde a partir de cierta cifra, y lo ve todo igual. Por ejemplo, si una persona tiene ahorrada una cantidad de 67000000000€ y otra tiene 54321000000000€, lo normal es ver ambos números iguales. Incluso poniendo puntos (que, por otra parte, no se hace porque se confunden con la coma decimal).

La notación científica ahorra estos problemas. La teoría básica consiste en que cualquier número (especialmente los grandes y los pequeños), se pueden escribir como:

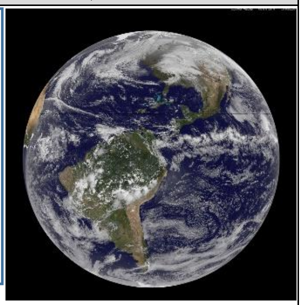
Donde a, b, c, d son números. Por ejemplo, las cantidades anteriores serían y la otra Lo primero que salta a la vista es lo siguiente:

- Hemos tenido que aproximar a tres cifras significativas. El 2 y el 1 en la segunda cantidad desaparecen. Piensa que si tienes 5 billones de €, tener un par de millones más o menos no es tan importante…
- Podemos comparar con facilidad. La segunda cantidad tiene y la primera Esto significa 3 ceros más en la segunda, es decir, unas veces mayor que la primera.

Los pasos para usar la notación científica son sencillos:

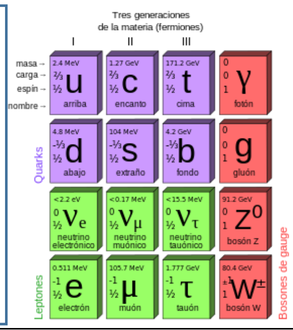
- la coma decimal hacia el lugar requerido: delante de la primera cifra distinta de cero. Y cuenta cuántas veces has movido la coma.
- el número a tres cifras significativas. Ya sabes, 1.234 se redondea a 1.23, mientras que 1.235 o 1.236 se redondea a 1.24.
- Coloca el número con sus tres cifras, seguido de al número de posiciones que has contado. Si es hacia la izquierda (números grandes), en . Si es hacia la derecha (números pequeños) en

Ejemplo 1: la masa de la Tierra es 5912365478965412365478954 kg
(por supuesto nos hemos inventado los números a partir del tercero)



Que, por otra parte, es la cantidad real que pesa la Tierra…

Ejemplo 2: la masa de un electrón es 0.0000000000000000000000000000009112 kg.



Ahora, con todo esto, las operaciones en notación científica son mucho más simples de hacer:

Ejemplo: calcula la siguiente expresión, en notación científica:

$$\frac{3004000000^2 \cdot 0.0000000002^3}{10024755^3 \cdot 0.001^{-7}}$$

Curiosidad: algunas magnitudes					
1 kilobyte	1Kb	10^3 bytes	1 decímetro	1dm	10^{-1} m
1 Megakilo	1Mkg		1 centilitro	1 cl	10^{-2} litros
1 Terapersona	1Tpersona		1 miligramo	1 mg	
1 Gigavoltio	1GV	10^{12} Voltios	1 micrómetro	1 μm	10^{-6} m
1 Petabyte	1Pb	10^{15} bytes	1 nanometro	1 nm	
1 Exaestrella	1Eestrella	10^{18} estrellas	1 angstrom	1 A	10^{-10} m
1 Zettasegundo	1Zs		1 picometro	1 pm	
1 Yottametro	1Ym	10^{24} metros	1 femtometro	1 fm	10^{-15} m

Bibliografía

- Las letras están sacadas de lasletras.org
- Imagen del radical: plusmaths.com
- Las imágenes de la Tierra y del modelo estándar están sacadas de Wikipedia.