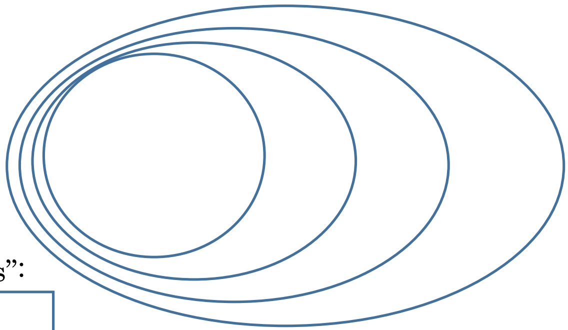


S3. Tema1

1.1. Los números

Podemos clasificar los números en varios tipos:

- sirven para contar. "Tengo 2 spinners":

  Hay cierto debate con el cero, aunque aquí lo consideraremos natural (0 cabras).
- sirven para contar y descontar: "Debo 3 manzanas"
- comúnmente llamados fracciones: división entre dos enteros:
- aquellos números (raros) que no pueden escribirse como división entre dos enteros. Ejemplos son

Curiosidad: demostrar que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como $\frac{a}{b}$ con a, b enteros

Supongamos que es posible. Entonces , donde a y b son primos entre sí (no puede simplificarse la fracción).
Entonces, elevando al

Pero, si $a^2 = 2b^2$, obviamente a es Y si a es par, entonces podemos escribir este número para un cierto k. Elevando ambos lados al cuadrado, $a^2 = 4k^2$. Sustituyendo:

$\Rightarrow$

Pero entonces, por el mismo argumento, b es par. Entonces, tenemos que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a y b formando una fracción irreducible, y sin embargo a y b son pares. Esto nos lleva a una contradicción. Por tanto, no es posible escribir $\sqrt{2}$ como $\frac{a}{b}$:

- incluyen tanto a los racionales como a los irracionales. Es lo que en este curso consideraremos "todos los números", aunque en un futuro no sea cierto.
- es la parte que no veremos en este curso, aunque la explicación es sencilla. ¿Y si llamamos ? Entonces ya podremos hacer raíces negativas, y cualquier número podrá ser puesto como $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. De esta forma, los reales son solo un subconjunto de los complejos, concretamente los complejos con $b = 0$.
- **Otros** (porque esto no para aquí).

FICHA A
Enteros

FICHA B (4)
Fracciones

Ejercicio 1.1. : clasifica los siguientes números, marcando con una cruz donde pertenecen:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-3					
6.2					
$1.\hat{3}$					
π					
2.2					
$1.\hat{9}$					
-2.4					
-7					
$\sqrt{7}$					

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
ϕ					
123					
$2.\hat{3}$					
$-\sqrt{100}$					
$-\sqrt{17}$					
$2.\hat{3}$					
0					
5					
1.17					

1.2. Paso de decimal a fracción.

Pasar de fracción a decimal es obvio: basta con hacer la operación. Pasar de decimal a fracción es algo más complicado, aunque no muy difícil. Tenemos cuatro tipos de decimales:

- : aquellos que tienen un número finito de decimales.
- aquellos cuyos decimales se repiten. Hay dos tipos:
    - Periódicos puros: toda la parte decimal se repite, llamada periodo:

      $23.\widehat{45} =$

    - Periódicos mixtos: en la parte decimal hay una parte que se repite ( ), y una que no ( ):

      $23.4\hat{5} =$

- aquellos que tienen decimales infinitos pero que no se repiten. Podemos construirlos de varias formas. Algunos surgen en la naturaleza, como $\pi = 3.14159\ldots$, y otros podemos construirlos, como el número:

Curiosidad: el número

Este número, llamado número divina proporción, etc, tiene muchas implicaciones en arte, matemáticas, física, etc. Mencionamos aquí solo una de ellas.

Si construimos un pentágono cualquiera, medimos una de sus diagonales (digamos, d), y un lado (digamos l), al hacer la división tenemos que:

El símbolo de la escuela pitagórica (los pitagóricos), en el siglo VI aC, es un pentágono:

Los pitagóricos descubrieron así los **irracionales**. Pero les pedían a sus discípulos que lo mantuviesen en secreto, pues parecía que había algo "diabólico" en ello. De ahí el nombre de "irracional", como "falto de razón".

Ejercicio voluntario: Crea, usando geogebra, un pentágono regular. Traza una diagonal usando “segmento”. Ahora, crea una variable f que sea igual a la división entre la diagonal y el lado. Para ello, ve a la barra de entrada y escribe “fi=”, y pulsas sobre la diagonal primero, luego pones una división /, y luego pulsa sobre el lado. Mueve los puntos del pentágono como quieras. ¿Cuánto vale f siempre? (Tienes las instrucciones para hacer esto en la página web, en la sección “Geogebra” de este curso)
Euclides, en torno al año 300 aC, dijo: “Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor” ¿Qué relación tiene esto con el número áureo? Esta frase lleva a una ecuación de segundo grado que, a su vez, lleva al número áureo. ¿Sabrías plantearla?

Ahora llega el momento de pasar de decimal a fracción. Consideramos tres tipos. **Recuerda simplificar siempre las fracciones.**

A la izquierda tienes la explicación detallada, y a la derecha la receta práctica.

Decimales exactos: dividir entre un 1 con tantos ceros como decimales tenga el número.	
Decimales periódicos puros: escribir el número, restarle la parte no periódica (la parte entera), y dividir entre tantos nueves como cifras tenga la parte periódica.	
Decimales periódicos mixtos: escribir el número, restarle la parte no periódica, y dividir entre tantos nueves como cifras tenga la parte periódica, y tantos ceros como cifras tenga la parte decimal no periódica.	

Ejercicio: pasa de decimal a fracción. Haz la operación si quieres al final para comprobar que está bien hecho.

2.1	$0.\hat{2}$	$4.\hat{9}$
0.04	4.32	$0.2\widehat{34}$
5.345	$1.\widehat{12}$	$3.\hat{3}$

Curiosidad: si un número acaba en ... $\hat{9}$, es igual a la unidad siguiente. Por ejemplo, $9.\hat{9}$ es exactamente igual a 10. ¿Por qué? Hay dos formas de verlo:

a) Haz las cuentas con el método anterior. Pasa $9.\hat{9}$ a fracción y luego simplifica. ¿Qué ocurre?

b) Intenta pensar en un número entre 9.9 y 10. Es fácil: 9.95. Intenta pensar en un número entre 9.99 y 10. Es fácil, 9.995. Intenta pensar en un número entre $9.\hat{9}$ y 10. Es imposible. Por tanto, deben ser el mismo número.

1.3. Intervalos

Cuando no podemos decir todos los números entre un par de ellos, recurrimos a los intervalos. Un intervalo indica desde dónde hasta dónde consideramos números, y si se incluyen o no los extremos. El símbolo (significa , es decir, no se incluye. [significa es decir, Por ejemplo, veamos cuándo vamos a clase (suponiendo que vamos a todas horas sin descansos):

Cuando queremos solo indicar números sueltos, usamos las llaves. Por ejemplo, vamos a clase:

Mientras que el fin de semana será:

Cuando usemos el en un intervalo, este siempre estará **sin incluir**, pues estrictamente hablando no es un número:

$x > 10$ significa

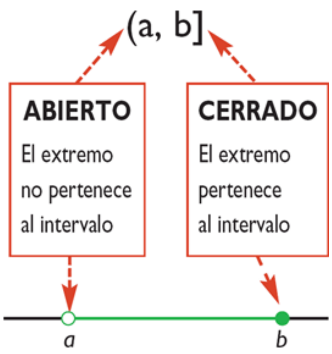
Esto que hemos escrito es una pues tiene inicio, pero no tiene fin. Cuando hagamos la recta entera, directamente escribiremos “todos los reales”:

Ejemplo: Podemos ir un paso más allá, y pedir representar aquellos números que cumplan:

$$|x| < 5$$

En este caso, queremos números que **en** es decir, en positivo), sean menores que 5. Por tanto la solución será , ambos sin incluir.

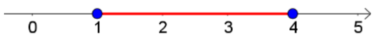
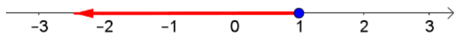
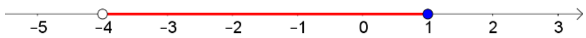
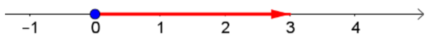
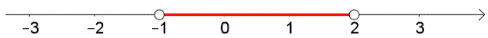
A la hora de representarlos en la recta, marcaremos con un cuando se incluya al número, y con un círculo sin relleno cuando el número esté incluido.



Ejercicios: representa los siguientes intervalos o condiciones en la recta real:

$(1,7]$	
$(-\infty,-2)$	
$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$	
$\left[\frac{1}{2},\infty\right)$	
$(-2,3)$	

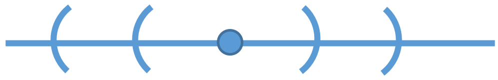
Ejercicios: indica el intervalo correspondiente, usando $x \in \cdots$

1.4. Representar números en la recta

El objetivo de esta parte del tema es representar números **con técnicas de dibujo técnico**, es decir, sin usar una regla numerada (sí una regla sin numerar), ni un transportador de ángulos (pero sí un compás). Veamos los distintos casos.

Para representar **números enteros** basta marcar las divisiones partiendo del cero:
- Fijar un punto como el cero
- Fijar una cierta cantidad con el compás (la unidad) y, empezando por el cero, ir haciendo marcas en cada uno de los números enteros con el

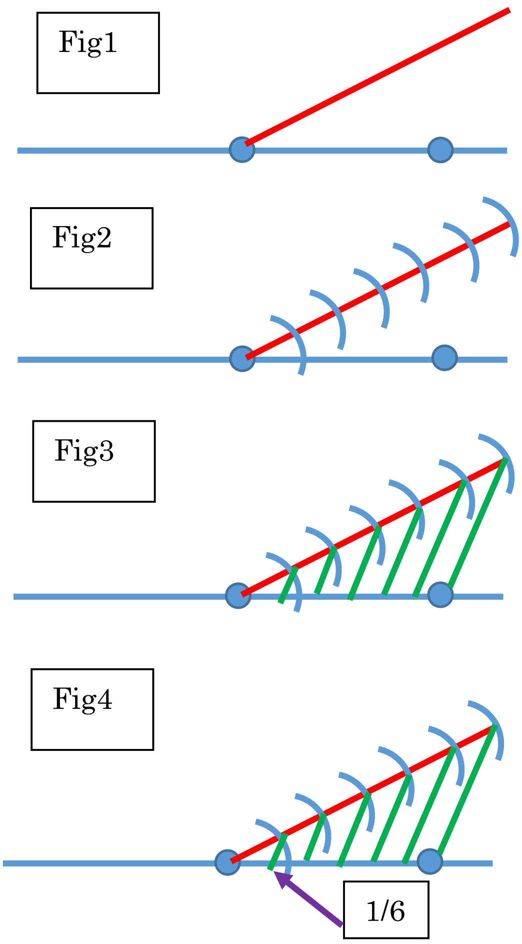


Hazlo tú

Descarga el manual de Geogebra de la página web en la sección Geogebra de 3º de ESO, y haz una aplicación para que Geogebra te muestre cómo se hace con la precisión de un ordenador.

Para representar **fracciones** (o decimales, previo paso de decimal a fracción), el proceso es el que sigue:
- Traza una recta desde el punto donde comienza la fracción hacia cualquier lugar por encima de la recta real. Por ejemplo, si es una fracción menor que 1, como 1/6 (fig1), empezaremos en el 0. Si es una fracción entre 1 y 2, como puede ser , primero descomponemos:

  Así que empezaríamos desde el 1.
- Con el compás, haz el número de divisiones en la nueva recta que tenga el denominador, empezando desde el cero (fig2)
- Traza una recta desde la última división hasta (en nuestro caso) el 1, y a partir de ahí traza a esta recta en cada una de las divisiones. Con esto el segmento horizontal queda dividido en 6 partes iguales.
- Ahora basta con tomar las partes correspondientes. Por ejemplo si es 1/6, la primera.



Hazlo tú

Descarga el manual de Geogebra de la página web en la sección Geogebra de 3º de ESO, y haz una aplicación para que Geogebra te muestre cómo se hace con la precisión de un ordenador.

Para representar raíces cuadradas irracionales (o racionales), se siguen los siguientes pasos:

- Si queremos calcular la raíz $\sqrt{a}$, se marca en la recta un punto a distancia a del origen, y otro a distancia $\boxed{}$ (figura 1, con $\sqrt{2}$)
- Se traza una semicircunferencia con extremos el origen y el último de los puntos (fig2). Tendrás que buscar previamente el $\boxed{}$, trazando dos arcos iguales desde los dos extremos y la recta que une sus intersecciones.
- Desde el primero de los dos puntos (en nuestro caso a distancia 2), trazar una perpendicular a la recta real, y marcar dónde corta con la semicircunferencia (fig3). Crear el segmento correspondiente.
- Ese segmento mide exactamente $\sqrt{2}$. Ahora solo queda llevarlo sobre el eje real con el compás (Fig4)
- Si nos piden representar $-\sqrt{2}$, habrá que llevarlo hacia atrás en el eje real. Si piden $2+\sqrt{2}$, habrá que empezar desde el $\boxed{}$ etc.

Fig1

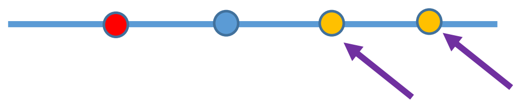


Fig2

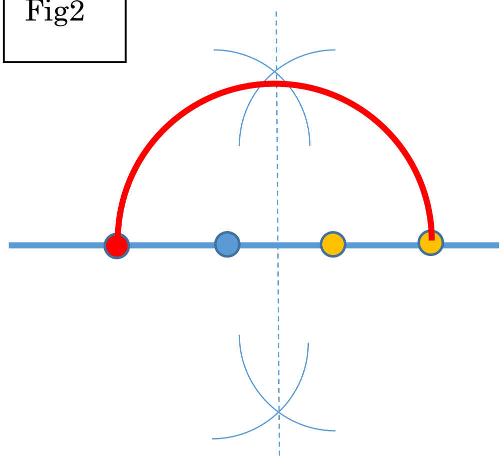


Fig3

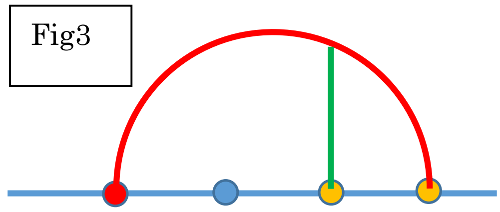
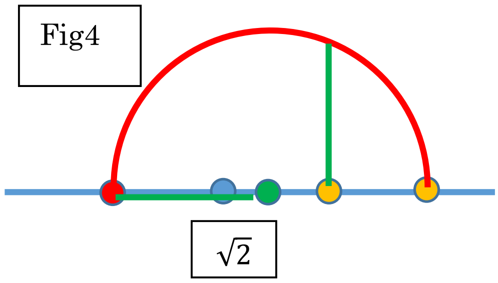


Fig4



Hazlo tú

Descarga el manual de Geogebra de la página web en la sección Geogebra de 3º de ESO, y haz una aplicación para que Geogebra te muestre cómo se hace con la precisión de un ordenador.

Ejercicios: representa los siguientes números sobre la recta real, **usando técnicas de dibujo técnico**:

$\frac{2}{3}$
$\sqrt{3}$
$\frac{7}{4}$
$1-\sqrt{5}$

$-\frac{5}{6}$
$2\sqrt{3}$

1.5. Errores

Cuando medimos, es muy habitual realizar redondeos. Al hacer esto, se cometen errores. Hay dos tipos de errores: absoluto y relativo.

1.5.1. Error absoluto:

$$\boxed{E_a = |V_{real} - V_{apx}|}$$

Ej: redondeamos 1/6 a la centésima. Calcula el error absoluto haciendo el paso a fracción.

$$\frac{1}{6} \approx 0.17$$

Pasamos a fracción: $0.17 = \frac{17}{100}$

El error será:

$$E_a = \left|\frac{1}{6} - \frac{17}{100}\right| = \left|-\frac{1}{300}\right| = \frac{1}{300}$$

Que se puede dejar sí o calcular.

1.5.2. Error relativo

El problema del error absoluto es que **tiene dimensiones**. Es decir, si $E_a = 0.01$, esto puede ser pequeño o grande. Por ejemplo, si estamos midiendo el tamaño de una mesa en metros, 0.01m es muy poco error, pero si es 0.01mm de error midiendo el ancho de un folio, es mucho.

Por eso se usa el error relativo:

$$\boxed{E_r = \frac{E_a}{V_{real}}}$$

A veces, según lo que se conozca del problema, puede usarse el valor aproximado en vez del real en el denominador.

Es muy habitual expresar este error en forma de porcentaje.

Ej: calcula el error relativo en el ejemplo anterior usando fracciones.

$$E_a = \cdots = \frac{1}{300} \Rightarrow E_r = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{300} = \frac{1}{50} = 0.02 = 2\%$$

Bibliografía

- Las letras están sacadas de lasletras.org
- Imagen del infinito: bbc.com
- Imagen de intervalos abiertos y cerrados: blog-matematica.blogspot