DINÁMICA Y CINEMÁTICA

1. Cinemática

Consideramos en este apartado la cinemática de los movimientos de aceleración constante. Estos engloban a la mayor parte de los movimientos que suelen representarse, y cuyas ecuaciones vienen dadas por:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ v_x(t) = v_{0x} + a_x t \end{cases} \\ \begin{cases} y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t \end{cases} \end{cases}$$

Estas ecuaciones representan la velocidad y la posición de una partícula para cada momento de tiempo. Habitualmente nos encontraremos con tiros en la atmósfera terrestre. En ese caso, la aceleración en el eje x, $a_x = 0$, y la aceleración en el eje y, $a_y = -g = -9.81$, la aceleración de la gravedad. Esto es, se tiene un movimiento uniforme en el eje x y un movimiento uniformemente acelerado en el eje y:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ v_x(t) = v_{0x} \end{cases} \\ \begin{cases} y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}g t^2 \\ v_y(t) = v_{0y} - g t \end{cases} \end{cases}$$

No obstante, puede que haya algún problema en que esto no ocurra. Veremos algún ejemplo más adelante.

La forma de resolver estos problemas se basa en los siguientes pasos:

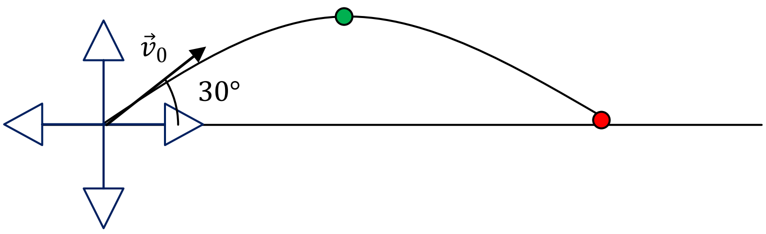
1. Esquematizar el problema
2. Escoger un sistema de referencia apropiado
3. Escribir las ecuaciones generales
4. Sustituir los valores iniciales conocidos: $x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y}, a_x$ y a_y
5. Analizar qué ocurre en las situaciones que nos propone el problema.

Veamos un ejemplo básico:

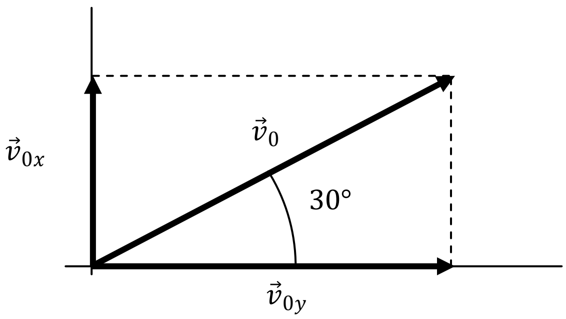
Ejemplo 1.1. ***Se dispara un proyectil con una velocidad de 20m/s desde el suelo, con un ángulo de 30 grados sobre la horizontal. Calcular:***

a) La altura máxima que alcanza.
b) El tiempo que tarda en caer al suelo.
c) El alcance (lugar donde cae)
d) La velocidad cuando llega al suelo.

El primer paso, como se ha dicho, es hacer un esquema del problema:



En el esquema se indica el sistema de referencia utilizado con unas flechas, dando por hecho que el eje positivo del eje y es hacia arriba, y el del eje x es hacia la derecha. El siguiente problema al que nos enfrentamos (común a casi todos los problemas) es que no tenemos las componentes v_{0x} y v_{0y} de la velocidad, pero sí el vector $\vec{v}_0$ y el ángulo que forman. Para obtener las componentes, utilizamos trigonometría:



En el esquema anterior, vemos que $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y}$. Pero lo más importante es que podemos hallar cada una de las componentes, sin más que hacer:

$$\begin{cases} cos30 = \dfrac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = v_0 cos30 \\ sen30 = \dfrac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = v_0 sen30 \end{cases}$$

Ya tenemos las condiciones iniciales. La posición inicial, tanto de x como de y será cero (por dónde hemos escogido el sistema de referencia). Las velocidades iniciales acabamos de hallarlas, y la aceleración sólo existirá en el eje y, que será la de la gravedad. Las ecuaciones generales quedarán como:

$$\begin{cases} \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{1}{2}a_x t^2 \\ v_x(t) = v_{0x} + a_x t \end{cases} \\ \begin{cases} y(t) = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{1}{2}a_y t^2 \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x(t) = v_0 cos30t \\ v_x(t) = v_0 cos30 \end{cases} \\ \begin{cases} y(t) = v_0 sen30t - \dfrac{1}{2}9.8t^2 \\ v_y(t) = v_0 sen30 - 9.81t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \begin{cases} x(t) = 10\sqrt{3}\,t \\ v_x(t) = 10\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y(t) = 10t - 4.9t^2 \\ v_y(t) = 10 - 9.81t \end{cases} \end{cases}}$$

Ahora, con estas ecuaciones, podemos hacer el resto del problema.

a) *Para hallar la altura máxima, debemos fijarnos en el punto verde del esquema. En ese punto, no conocemos a priori el tiempo que ha pasado, ni la posición en el eje x o en el eje y. La velocidad en x siempre es la misma, y no nos da información. Pero se cumple que la velocidad en el eje y, en ese punto, es cero. Llamemos t_m al tiempo en alcanzar la altura máxima. Se tiene que:*

$$v_y(t_m) = 0 \Rightarrow 0 = 10 - 9.81\, t_m \Rightarrow t_m = \frac{10}{9.81} \Rightarrow \boxed{t_m = 1.02\, s}$$

Sabiendo el tiempo transcurrido, podemos saber el resto de datos:

$$y(t_m) = 10\, t_m - 4.9\, t_m^2 \Rightarrow \boxed{y(t_m) = 5.11\, m}$$

Si quisiésemos, podríamos también hallar el resto.

b) *Para hallar el tiempo que tarda en llegar al suelo, nos fijamos en el punto rojo de la figura. La condición que se cumple en dicho punto es que la altura del objeto es cero. Llamaremos t_c al tiempo que tarda en llegar a dicho punto (c de caída):*

$$y(t_c) = 0 \Rightarrow 10\, t_c - 4.9\, t_c^2 = 0 \Rightarrow t_c(10 - 4.9 t_c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_c = 0\, s \\ \boxed{t_c = 2.04\, s} \end{cases}$$

Obviamente, el resultado válido es el segundo. El primero no nos dice más que cuando el tiempo vale cero, también estamos en altura cero (a fin de cuentas cuando el tiempo es cero fue cuando lanzamos el objeto, y en ese momento estábamos a ras de suelo).

c) *Ya tenemos el tiempo de caída. Para ver el alcance, también nos fijamos en el punto rojo. Pero ya sabemos el tiempo que ha pasado en ese punto, por lo que:*

$$x(t_c) = 10\sqrt{3}\, t_c = 10\sqrt{3} \cdot 2.04 \Rightarrow \boxed{x(t_c) = 35.33\, m}$$

d) *De igual forma, hallamos las componentes de la velocidad en ese punto:*

$$\begin{cases} v_x(t_c) = 10\sqrt{3} \\ v_y(t_c) = 10 - 9.81 t_c \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} v_x(t_c) = 17.32\, m/s \\ v_y(t_c) = -10.01\, m/s \end{cases}}$$

La velocidad, en módulo, será por tanto:

$$|\vec{v}(t_c)| = v(t_c) = \sqrt{v_x^2(t_c) + v_y^2(t_c)} \Rightarrow \boxed{v(t_c) = 20\, m/s}$$

No es pura casualidad que la velocidad sea la misma que al principio. A fin de cuentas, el objeto va perdiendo velocidad según va subiendo, de igual forma que gana energía potencial. Pero al descender, convierte de nuevo la energía potencial en energía cinética, de forma que al hallarse a la misma altura que al principio, vuelve a tener la misma velocidad inicial. Por energías, tendríamos:

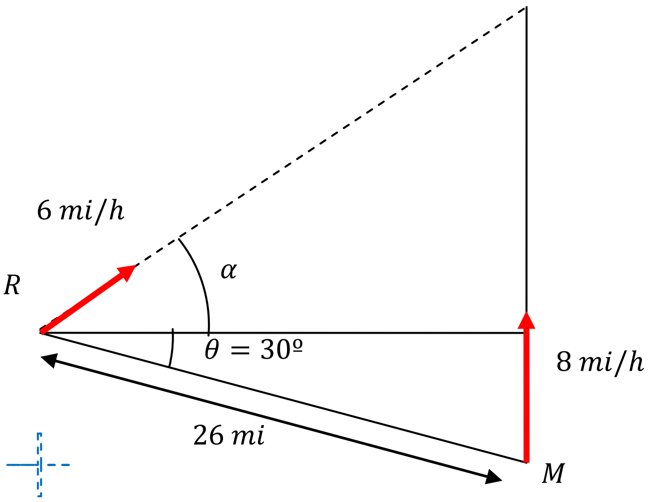
$$E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \underbrace{m g h_A}_{0} = \frac{1}{2} m v_B^2 + \underbrace{m g h_B}_{0}$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow \boxed{v_A = v_B}$$

1.1. Ejercicios resueltos:

62 ●●● SSM María y Roberto deciden encontrarse en el lago Michigan. María parte en su lancha de Petoskey a las 9:00 a.m. y viaja hacia el norte a 8 mi/h. Roberto sale de su casa sobre la costa de Beaver Island, situada a 26 mi y 30° al oeste del norte de Petoskey a las 10:00 a.m. y viaja a una velocidad constante de 6 mi/h. ¿En qué dirección debe poner su rumbo Roberto para interceptar a María y dónde y cuándo se verificará el encuentro?



Las ecuaciones de movimiento (movimiento constante, aceleración cero) para María y Roberto serán:

$$\begin{cases} x_M(t) = x_{0M} + v_{0Mx}\,t \\ y_M(t) = y_{0M} + v_{0My}\,t \\ \\ x_R(t) = x_{0R} + v_{0Rx}\,t \\ y_R(t) = y_{0R} + v_{0Ry}\,t \end{cases}$$

Por sencillez, supongamos que el origen de coordenadas está, para el eje x, en la posición de Roberto, y para el eje y, en la posición de María. Es decir, dónde indica el "+" en el esquema. Según esto, y descomponiendo la velocidad de Roberto en sus componentes en ambos ejes:

$$\begin{cases} x_M(t) = 26cos30 \\ y_M(t) = 8t \\ \\ x_R(t) = 6cos\alpha\ t \\ y_R(t) = 8sen30 + 6sen\alpha\ t \end{cases}$$

Sin embargo, estas no son las ecuaciones reales que describen los movimientos, pues sabemos que Roberto sale una hora más tarde que María. En este caso, a María le habrá dado tiempo a recorrer un espacio adicional (8 millas). Es decir, en las ecuaciones de María deberemos cambiar t por $t + 1$:

$$\begin{cases} x_M(t) = 26cos30 \\ y_M(t) = 8t + 8 \\ \\ x_R(t) = 6cos\alpha\, t \\ y_R(t) = 8sen30 + 6sen\alpha\, t \end{cases}$$

Estas sí son las ecuaciones que describen el movimiento en general. Ahora bien, en el punto en que se encuentran, coincidirá tanto la posición como el tiempo:

$$\begin{cases} x_M(t_{final}) = x_R(t_{final}) \\ y_M(t_{final}) = y_R(t_{final}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 26cos30 = 6cos\alpha\, t_{final} \\ 8t_{final} + 8 = 8sen30 + 6sen\alpha\, t_{final} \end{cases}$$

Despejando t_{final} de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$$t_{final} = \frac{26cos30}{6cos\alpha} \rightarrow 8\frac{26cos30}{6cos\alpha} + 8 = 8sen30 + 6sen\alpha \frac{26cos30}{6cos\alpha}$$

Ecuación en que debemos despejar el ángulo α. Para ello comencemos por simplificar la ecuación:

$$8.26.cos30 + 8.6.cos\alpha = 8.6.sen30cos\alpha + 6.26.sen\alpha\, cos30$$

$$2.26.\frac{\sqrt{3}}{2} + 2.6.cos\alpha = 2.6.\frac{1}{2}cos\alpha + 3.13.sen\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\alpha(12 - 6) + 26\sqrt{3} = \frac{39\sqrt{3}}{2}sen\alpha$$

Con $sen\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$ y elevando al cuadrado:

$$36cos^2\alpha + 26^2.3 + 12.26.\sqrt{3}cos\alpha = \frac{39^2.3}{4}(1 - cos^2\alpha)$$

$$144cos^2\alpha + 2028 + 312\sqrt{3}cos\alpha = 4563(1 - cos^2\alpha)$$

$$4687cos^2\alpha + 312\sqrt{3}cos\alpha - 2535 = 0$$

$$cos\alpha = \frac{-312\sqrt{3} \pm \sqrt{292032 + 47526180}}{9374} = \frac{-540'39 \pm 6915'07}{9374} = 0'68$$

Luego:

$$\alpha = arccos0'68 = 0.82rad = 47^o$$

NOTA: es muy posible que haya una forma mucho más sencilla de hallar el ángulo. Posiblemente escogiendo mejor el origen de coordenadas.

24 ●● ¿Por qué cuando cae al suelo una tostada siempre lo hace por el lado que tiene mantequilla o mermelada? La pregunta puede parecer tonta, pero ha sido objeto de debate científico serio. El análisis es demasiado complicado para reproducirlo aquí, pero R.D. Edge y Darryl Steinert demostraron que una tostada a la cual se la empuja suavemente hasta el borde de una mesa, cae cuando se inclina un ángulo de 30° con la horizontal (véase la figura 9.40) y tiene una velocidad angular de $\omega = 0{,}956\sqrt{g/l}$, donde l es la longitud del lado de la tostada (supuesta de forma cuadrada). Suponiendo que una tostada empieza a caer con la mermelada o la mantequilla hacia arriba, ¿de qué lado caerá si ésta cae desde una mesa de 0,5 m de altura? ¿Qué ocurre si la mesa tiene 1 m de altura? Suponer que la tostada tiene 0,1 m de lado y que cae al suelo con la mermelada o la mantequilla hacia abajo si el ángulo que forma con el suelo está entre 180° y 270°. (Si la tostada gira un ángulo superior a 360° tendremos que reducirlo al intervalo 0° – 360°). Ignórense las fuerzas debidas a la resistencia del aire. Para el lector interesado en este problema y en otros muchos, se recomienda el magnífico libro de Robert Erlich, *Why Toast Lands Jelly-Side down: Zen and the Art of Physics Demonstrations*[1] *(Por qué las tostadas caen por el lado de la mermelada: Zen y el arte de las demostraciones de la física).*

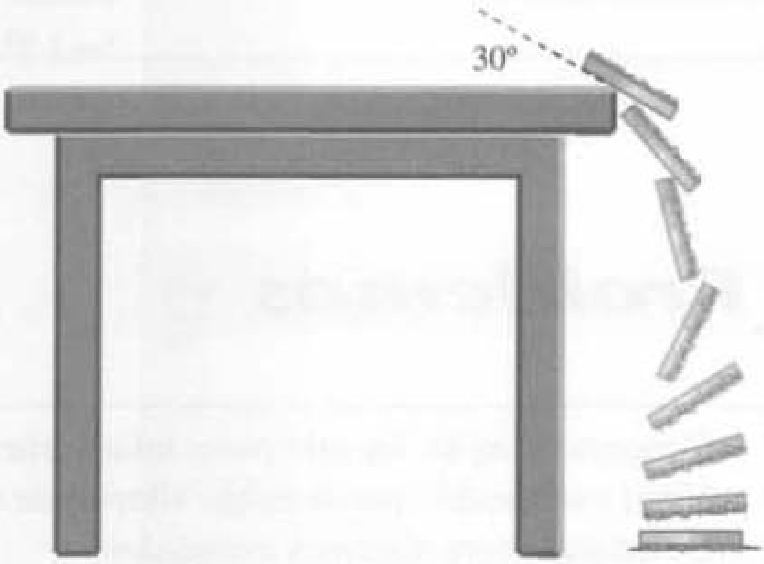


Figura 9.40 Problema 24

Estudiamos en el problema dos partes distintas de la tostada. Por un lado, el movimiento de translación, y por otro, el movimiento de rotación. El movimiento de translación se estudia como se hacía en los primeros temas. Asumiendo que la altura inicial de la tostada es la altura de la mesa, y llamándola h:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

De forma que el tiempo que tarda la tostada en caer al suelo será:

$$t_{caida} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Por otro lado, las ecuaciones de la rotación de la tostada vienen dadas por:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} + 0.956\sqrt{\frac{g}{l}}\, t \\ \omega = \omega_0 = 0.956\sqrt{\frac{g}{l}} \end{cases}$$

Donde hemos usado los datos del enunciado, y supuesto que no hay aceleración angular (no hay nada que la cause). Según esto, el ángulo con el que la tostada llega al suelo (recordemos que hemos llamado h a la altura de la mesa) será:

$$\theta_f = \frac{\pi}{6} + 0.956\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\pi}{6} + 0.956\sqrt{\frac{2h}{l}}$$

Con los datos del problema, $l = 0.1m$ y una altura de $0.5m$ y $1m$ respectivamente:

	θ_f
$h = 0.5m$	$203.21°$
$h = 1m$	$274.96°$

Luego, efectivamente, se demuestra físicamente (bajo los condicionantes y aproximaciones del problema), que la tostada en el primer caso cae aproximadamente con la mermelada hacia abajo . En el segundo caso no es estrictamente así, pero no se queda lejos. Así pues podemos decir que en una mesa de tamaño normal (de entre medio metro y aproximadamente algo menos de un metro), la tostada bajo estas condiciones caerá con la mermelada hacia abajo.

Más estrictamente hablando, las alturas límites para que esto ocurra (para que el ángulo esté comprendido entre 180 y 270 grados):

	h
$\theta = 180$	$0.37m$
$\theta = 270$	$0.95m$

Así que una mesa entre estas alturas tiene la “propiedad” de lanzar la tostada con la mermelada hacia el suelo.

35 ●● SSM iSOLVE ✓ La cinta de una "cassette" de vídeo VHS estándar tiene una longitud $L = 246$ m; su duración en funcionamiento es de 2,0 horas (figura 9.41). Al comienzo, el carrete que contiene la cinta tiene un radio externo de aproximadamente $R = 45$ mm, mientras que su radio interno es $r = 12$ mm aproximadamente. En cierto punto de su recorrido, ambos carretes tienen la misma velocidad angular. Calcular esta velocidad angular en radianes por segundo y revoluciones por minuto.

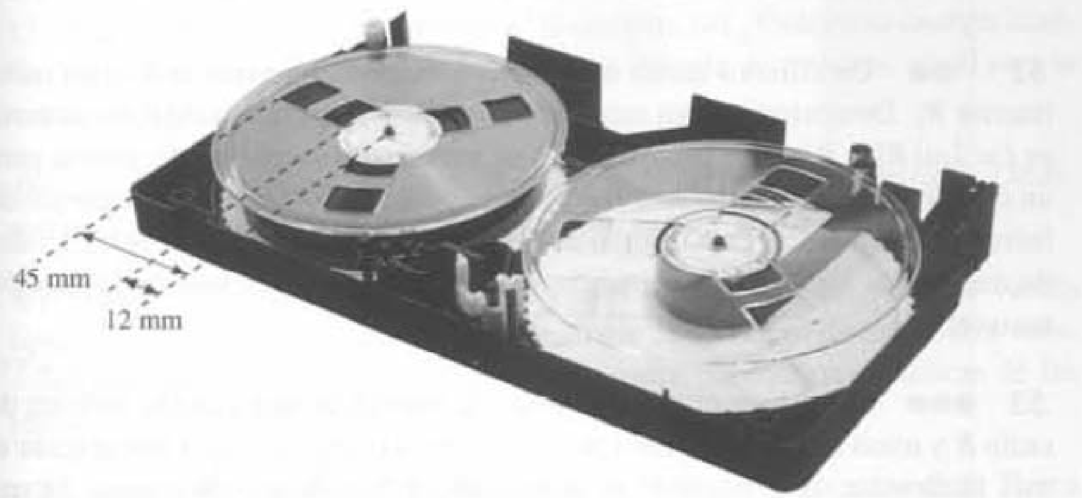


Figura 9.41 Problema 35

La velocidad angular, expresada en términos de la velocidad lineal es $\omega = v/r$

La velocidad angular, por tanto, será la misma en los dos carretes cuando ambos tengan el mismo área. Esto ocurrirá cuando:

$$A = \frac{1}{2}A_i = \frac{1}{2}(\pi R^2 - \pi r^2) = \pi R_f^2 - \pi r^2$$

Despejando R_f:

$$R_f = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}} = 32.93mm$$

En esta situación:

$$\omega = v/R_f$$

Dicha velocidad lineal viene dada por $v = \frac{246m}{2h} = 0.03416m/s$:

$$\omega = 1.06\frac{rad}{s} = 10.12\frac{rev}{min}$$

1.2. Ejercicios propuestos:

20 • Un río de orillas rectas y paralelas tiene una anchura de 0,76 km (véase la figura 3.38). La corriente del río baja a 4,0 km/h y es paralela a los márgenes. El barquero que conduce una barcaza que puede alcanzar una velocidad máxima de 4,0 km/h en aguas quietas desea ir de A a B, donde AB es perpendicular a la orilla. El barquero debe (*a*) dirigir la barca directamente a través del río, perpendicular a la orilla siguiendo AB, (*b*) poner un rumbo de 53° dirigido hacia aguas arriba respecto la dirección AB, (*c*) poner un rumbo de 37° dirigido hacia aguas arriba respecto la dirección AB, (*d*) renunciar ya que es imposible ir de A hasta B con una nave de estas características, (*e*) ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

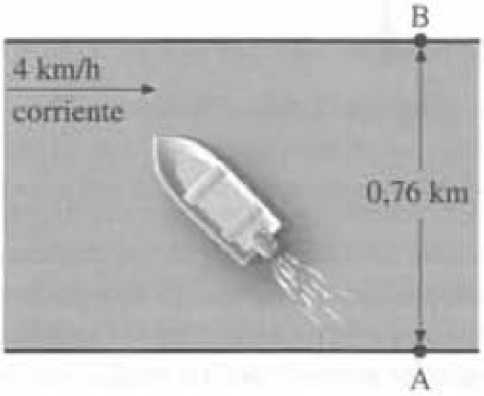


Figura 3.38 Problema 20

43 •• SSM Ocasionalmente tenemos noticia de personas que sobreviven a caídas desde grandes alturas cuando la superficie sobre la que caen es blanda. Durante una escalada por la vía norte del Eiger (montaña de los Alpes suizos), una fijación del montañero Carlos Ragone cedió y precipitó al escalador a una caída de 150 m sobre la nieve. Sorprendentemente sufrió únicamente unas pocas magulladuras y un tirón en el hombro. (*a*) ¿Qué velocidad final tenía antes del choque con la nieve? (Despreciar la resistencia del aire). (*b*) Suponiendo que su impacto dejó un agujero de 122 cm en la nieve, estimar la aceleración a la que estuvo sometido durante el frenado. (Se supone que la aceleración fue constante.) Expresarla como múltiplo de g (aceleración de caída libre en la superficie de la Tierra).

61 ●● SSM Un coche que marcha con una velocidad constante de 20 m/s pasa por un cruce en el instante $t = 0$ y 5 segundos después pasa por el mismo cruce un segundo coche que viaja en el mismo sentido pero a 30 m/s. (*a*) Hacer un gráfico de las funciones de posición $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de ambos coches. (*b*) Hallar cuándo el segundo coche adelanta al primero. (*c*) ¿Cuánto han recorrido ambos coches desde el cruce al ocurrir el adelantamiento? (*d*) ¿Dónde se encuentra el primer coche cuando el segundo pasa el cruce?

74 ●● SSM Determine la aceleración que experimenta la Luna debida a la Tierra, usando para ello los valores de la distancia media y del periodo orbital que aparecen en la tabla de datos físicos al final del libro. Suponga que la órbita es circular. Exprese esta aceleración como una fracción del módulo de la aceleración de caída libre.

80 ●● Un objeto cae de una altura h. Durante el segundo final de su caída recorre 38 m. ¿Cuánto vale h?

85 ●● SSM iSOLVE Dos personajes de dibujos animados responden a su argumento habitual y uno persigue al otro. El coyote Wiley (*Carnivorous hungribilous*) intenta cazar de nuevo al Correcaminos (*Speedibus cantcatchmi*). Ambos, en su frenética carrera llegan al borde de un profundo barranco de 15 m de ancho y 100 m de profundidad. El Correcaminos salta con un ángulo de 15° por encima de la horizontal y aterriza al otro lado del barranco sobrándole 1,5 m. (*a*) ¿Cuál era la velocidad del Correcaminos antes de iniciar el salto? Ignore la resistencia del aire. (*b*) El Coyote, con el mismo objetivo de superar el obstáculo, salta también con la misma velocidad inicial, pero con distinto ángulo de salida. Para su desgracia, le faltan 0,5 m para poder alcanzar el otro lado del barranco. ¿Con qué ángulo saltó? (Supóngase que éste fue inferior a 15°.)

96 ●●● iSOLVE Un tren de pasajeros circula a 29 m/s cuando el conductor ve delante de él un tren de carga a 360 m de distancia por la misma vía en la misma dirección. El tren de carga lleva una velocidad de 6 m/s. (*a*) Si el tiempo de reacción del conductor es de 0,4 s, ¿cuál debe ser la desaceleración del tren de pasajeros para evitar la colisión? (*b*) Si su respuesta es la desaceleración máxima que puede realizar el tren de pasajeros, pero el tiempo de reacción del conductor es de 0,8 s, ¿cuál será entonces la velocidad relativa de los dos trenes en el instante de la colisión y qué distancia habrá recorrido el tren de pasajeros desde que el conductor divisó el tren de carga hasta que se produjo el choque?

104 ●● Una muchacha que está a 4 m de una pared vertical lanza contra ella una pelota (figura 3.53). La pelota sale de su mano a 2 m por encima del suelo con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = (10\ \text{m/s})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ o $10\sqrt{2}$ m/s a 45°. Cuando la pelota choca en la pared, se invierte la componente horizontal de su velocidad mientras que permanece sin variar su componente vertical. ¿Dónde caerá la pelota al suelo? *Sugerencia: Se puede considerar que la pared actúa como un espejo. Determinar el alcance, sin considerar la pared, y una vez conocido, considerar la reflexión especular en la pared.*

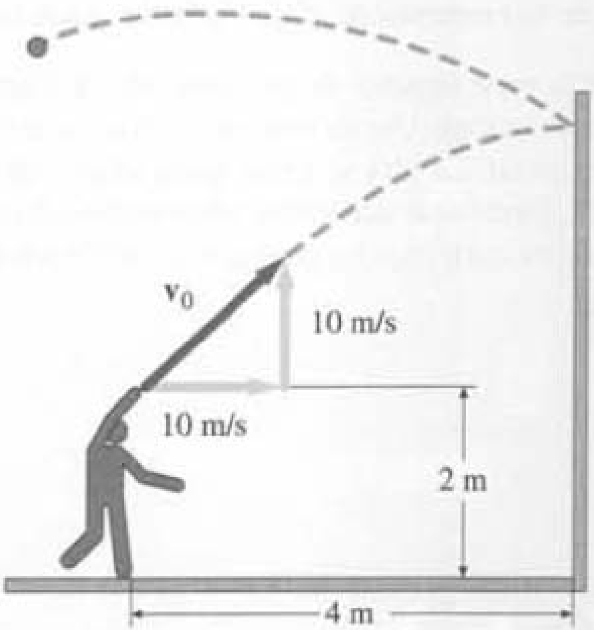


Figura 3.53 Problema 104

108 ●●● Una bola A se suelta desde lo más alto de un edificio en el mismo instante en que otra bola B se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo. Cuando las bolas se encuentran, ambas se mueven en sentido contrario y la velocidad de la bola A es dos veces la velocidad de la bola B. ¿En qué fracción de la altura del edificio ocurre el encuentro?

109 ●●● Resuelva el problema 108 si la colisión ocurre cuando las dos bolas se mueven en el mismo sentido y la velocidad de A es 4 veces la velocidad de B.

119 ●●● Darlen es una motorista acróbata de un circo ambulante. Para dar más emoción a su actuación, salta desde una rampa que posee una inclinación θ y sobrepasa una zanja con llamas de anchura x y alcanza el otro extremo sobre una plataforma elevada (altura h respecto del lado inicial) (figura 3.55). (*a*) Para

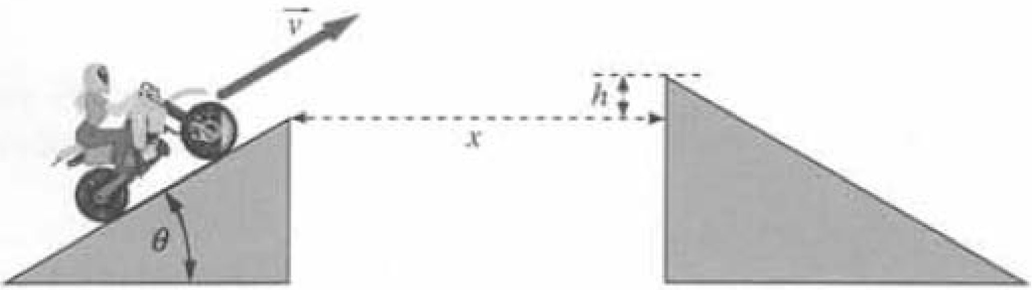


Figura 3.55 Problema 119

una determinada altura h, encuentre la velocidad de despegue mínima v_{min} para realizar el salto con éxito. (*b*) ¿Cuál es v_{min} para un ángulo de lanzamiento $\theta = 30°$ si la profundidad del pozo es de 8 m y la altura de la plataforma $h = 4$ m? (*c*) Muestre que, independientemente del módulo de la velocidad de despegue, la altura máxima de la plataforma es $h_{\text{máx}} < x \operatorname{tg} \theta$. Interprete el resultado físicamente. (Desprecie los efectos de la resistencia del aire y trate la motocicleta como una partícula.)

122 ●● Desde la parte superior de un acantilado de altura h se lanzan dos pelotas con idéntica velocidad. Una de ellas se lanza hacia arriba con un ángulo α respecto a la horizontal. La otra se lanza hacia abajo con un ángulo β respecto a la horizontal. Demostrar que ambas pelotas chocan contra el suelo con la misma velocidad y calcular el valor de esta velocidad en función de h y de la velocidad inicial v_0.

2. Dinámica

Si la cinemática se encarga de determinar cómo se mueve un objeto, conocidas las condiciones de posición, velocidad y aceleración, la dinámica se encarga fundamentalmente de hallar esta última, la aceleración, y su relación con la fuerza. Básicamente, la única ecuación importante de este tema es la 2º ley de Newton, que se expone a continuación:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{F} = m\vec{a}}$$

Aunque la notación pueda parecer un poco desconcertante, repasemos brevemente el concepto de sumatorio. El sumatorio indica que se parta de la variable i con valor 1 y se escriba lo que lleve dentro. A continuación, se suma a lo anterior lo mismo, pero ahora con la variable $i = 2$, luego $i = 3$, y así hasta que se llegue hasta N. Por poner un ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{i^2+1}{i} = \frac{1^2+1}{1} + \frac{2^2+1}{2} + \frac{3^2+1}{3} + \frac{4^2+1}{4} = 2 + \frac{5}{2} + \frac{10}{3} + \frac{17}{4} = \frac{145}{12}$$

En nuestro caso, es obviamente más sencillo el desarrollo:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N = m\vec{a}}$$

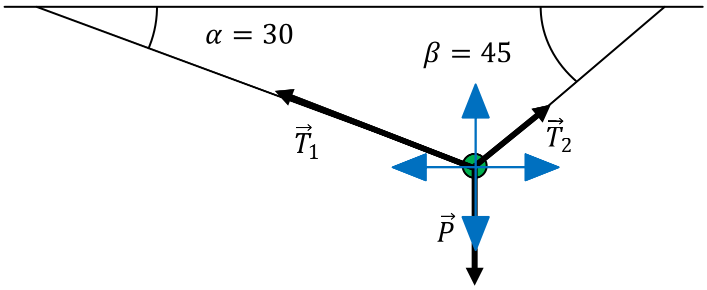
Lo que aquí dice es que la suma de todas las fuerzas es proporcional a la aceleración. Hay que notar que las fuerzas son vectores y, por tanto, pueden cancelarse entre sí. Por ejemplo si tuviésemos dos fuerzas opuestas, al sumar sus vectores se cancelarían, y la ecuación diría que no hay aceleración (dos fuerzas opuestas es equivalente a que no actúa ninguna fuerza).

Para nuestros problemas, deberemos escribir esta ecuación, y descomponer cada fuerza en sus componentes vertical y horizontal, para determinar la aceleración en cada eje. Los pasos a seguir son:

1. Dibujar un esquema del problema, dibujando las fuerzas involucradas
2. Escoger un sistema de referencia apropiado
3. Escribir la 2º ley de Newton y desarrollarla
4. Descomponer cada fuerza y sumarlas

Como ejemplo de aplicación, veamos el siguiente:

<u>Ejemplo 2.1.</u> Un cuadro se cuelga del techo, de forma que los cables forman ángulos $\boldsymbol{\alpha = 30°}$ y $\boldsymbol{\beta = 45°}$, como indica el dibujo. Hallar las tensiones de los cables, suponiendo que la masa del objeto es de $\boldsymbol{4kg}$, para que el cuadro esté en equilibrio.

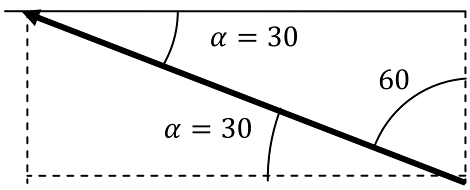


Escribimos la 2º ley de Newton, y desarrollamos:

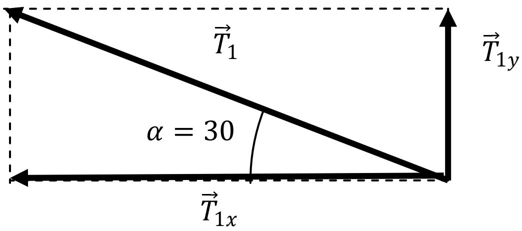
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

Donde hemos hecho $\vec{a} = \vec{0}$, pues el objeto debe estar en equilibrio (no se mueve, velocidad constante e igual a cero, aceleración cero).

El problema que tenemos ahora es que debemos descomponer las fuerzas en sus componentes. Con el sistema de referencia indicado mediante flechas en el esquema (típico sistema $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$), el peso queda ya como $\vec{P} = -P\vec{\jmath}$, donde P indica el módulo de la fuerza. Pero las otras dos tienen componentes en los dos ejes, que habrá que calcular. Para empezar, vemos qué ángulo forma la fuerza $\vec{T}_1$ con la horizontal:



Sabiendo esto, pasamos a descomponer:



Del dibujo, notamos que: $\vec{T}_1 = \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{1y}$. Pero esto no es lo que realmente nos interesa, sino cuál es el módulo de cada una. Para ello utilizamos trigonometría:

$$\begin{cases} sen30 = \dfrac{T_{1y}}{T_1} \Rightarrow T_{1y} = T_1 sen30 \\ cos30 = \dfrac{T_{1x}}{T_1} \Rightarrow T_{1x} = T_1 cos30 \end{cases}$$

E igual para $\vec{T}_2$. En nuestra ecuación de Newton, no tenemos más que escribir los sentidos de las fuerzas. Por ejemplo, T_{1x} es negativa, pues apunta a la izquierda, mientras que T_{1y} es positiva, pues apunta hacia arriba:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

$$-T_{1x}\vec{\imath} + T_{1y}\vec{\jmath} + T_{2x}\vec{\imath} + T_{2y}\vec{\jmath} - P\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$$

Ahora bien, para que eso se cumpla, debe cumplirse para cada eje por separado, esto es:

$$\begin{array}{ll} Eje\ \vec{\imath} & -T_{1x} + T_{2x} = 0 \\ Eje\ \vec{\jmath} & T_{1y} + T_{2y} - P = 0 \end{array}$$

O lo que es lo mismo, sabiendo la expresión del módulo de cada fuerza:

$$\begin{cases} -T_1 cos\alpha + T_2 cos\beta = 0 \\ T_1 sen\alpha + T_2 sen\beta - mg = 0 \end{cases}$$

Donde sabemos todo salvo T_1 y T_2. Lo que tenemos es un sistema de ecuaciones, de fácil solución:

$$T_1 = T_2 \frac{cos\beta}{cos\alpha} \Rightarrow T_2 \frac{cos\beta}{cos\alpha} sen\alpha + T_2 sen\beta - mg = 0$$

$$T_2(cos\beta tg\alpha + sen\beta) = mg$$

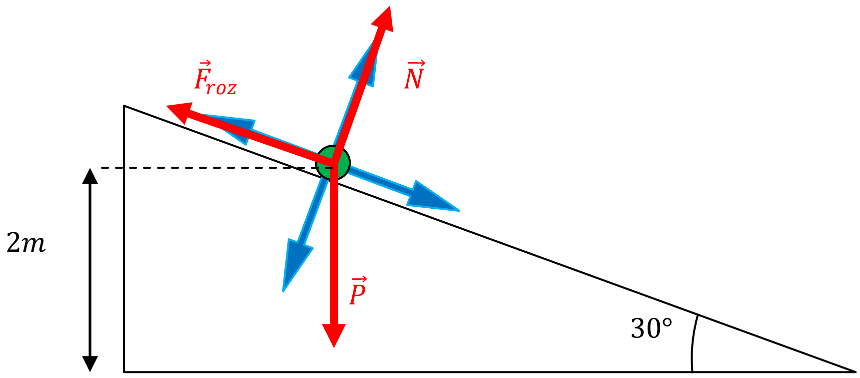
$$\boxed{T_2 = \frac{mg}{cos\beta\ tg\alpha + sen\beta}} \Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{mg}{cos\alpha\ tg\beta + sen\alpha}}$$

El problema que acabamos de ver es el típico problema introductorio para el análisis de fuerzas. Pero hay otro problema más típico, el del plano inclinado. Veámoslo:

Ejercicio 2.2. Una caja se encuentra situada en un plano inclinado 30 grados sobre la horizontal. La altura de la caja sobre el suelo es de 2 metros, y el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0.3$. Hallar:

a) La aceleración con la que cae la caja
b) El tiempo que tarda en caer al suelo

Colocamos el esquema, con las fuerzas marcadas (en rojo), y el sistema de referencia (en azul). Este sistema de referencia le situamos rotado, de forma que abarque la mayor parte de fuerzas y tengamos que descompongar menos:



Según el esquema, tenemos que la fuerza normal está justo en el eje $\vec{j}$. La fuerza de rozamiento la hemos colocado justo en el $-\vec{i}$. Pero la fuerza del peso habrá que descomponerla:

$$\vec{P} = P_x\vec{i} - P_y\vec{j}$$

Nótese en el dibujo por qué la componente x es positiva y la componente y es negativa. Utilizando trigonometría, vemos que $P_x = Psen30$ y $P_y = Pcos30$. Notemos que esta descomposición es diferente a la que habitualmente obteníamos con los lanzamientos en los tiros oblicuos.

Escribimos la 2º ley de Neewton y la desarrollamos:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F}_{roz} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$Psen30\vec{i} - Pcos30\vec{j} - F_{roz}\vec{i} + N\vec{j} = ma\vec{i}$$

Hemos supuesto que la aceleración sigue el eje $\vec{i}$. Si tuviese alguna componente en el eje $\vec{j}$, el objeto se "despegaría" del suelo, o se hundiría en él. Descomponemos ahora la ecuación anterior en sus dos componentes:

$$\begin{cases} Eje\ \vec{i} & Psen30 - F_{roz} = ma \\ Eje\ \vec{j} & -Pcos30 + N = 0 \end{cases}$$

Lo único que nos queda por hacer es sustituir en las expresiones anteriores las expresiones de cada fuerza. Recordemos que $F_{roz} = \mu N$, y que el peso $P = mg$ (ambos en módulo, por lo que no llevan signo):

$$\begin{cases} mgsen30 - \mu N = ma \\ N = mgcos30 \end{cases}$$

Dado que lo único que no conocemos es la normal N y la aceleración, tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Para resolverlo, y como sólo nos interesa la aceleración, sustituimos la normal ya despejada de la segunda ecuación en la primera:

$$mgsen30 - \mu mgcos30 = ma \Rightarrow \boxed{a = g(sen30 - \mu cos30)}$$

Que en números, resulta ser de: $\boxed{a = 2.35\ m/s^2}$

Para hacer ahora el segundo apartado, nos fijamos en que en el eje $\vec{\imath}$, tenemos un movimiento uniformemente acelerado. No vamos a estudiar un movimiento oblicuo, con dos coordenadas, pues todo el movimiento se desarrolla en el eje $\vec{\imath}$. Así pues, recurrimos a las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases}$$

En donde, situando el sistema de referencia donde indica el dibujo, tendríamos que la posición inicial es cero, y la velocidad inicial también (se deja caer…). Así pues, sustituyendo la aceleración antes obtenida:

$$\begin{cases} s(t) = 1.175t^2 \\ v(t) = 2.35t \end{cases}$$

Queremos fijarnos en el momento en que cae al suelo. Para ese momento, y conocida la altura del plano inclinado, podemos conocer la distancia recorrida. Utilizando trigonometría:

$$sen30 = \frac{2}{h} \Rightarrow h = 4m$$

Con lo cual:

$$s(t_{caida}) = 4 = 1.175t_{caida}^2 \Rightarrow \boxed{t_{caida} = 1.845\ s}$$

2.1. Ejercicios propuestos

7 ● Imagínese que un objeto se envía al espacio exterior, lejos de cualquier galaxia, estrella u otro objeto estelar. ¿Cómo cambiará su masa? ¿Y su peso?

43 ● Un semáforo está colgado de un soporte tal como se muestra en la figura 4.31. ¿La tensión del cable más vertical es mayor o menor que la del otro cable?

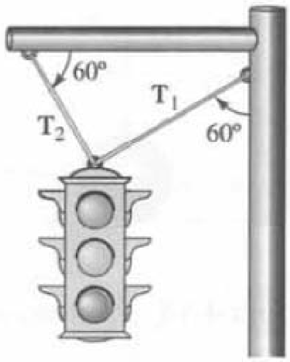


Figura 4.31 Problema 43

59 ●● Un cuerpo se mantiene en posición mediante un cable a lo largo de un plano inclinado pulido (figura 4.44). (*a*) Si $\theta = 60°$ y $m = 50$ kg, determinar la tensión del cable y la fuerza normal ejercida por el plano inclinado. (*b*) Determinar la tensión en función de θ y m y comprobar el resultado para $\theta = 0$ y $\theta = 90°$.

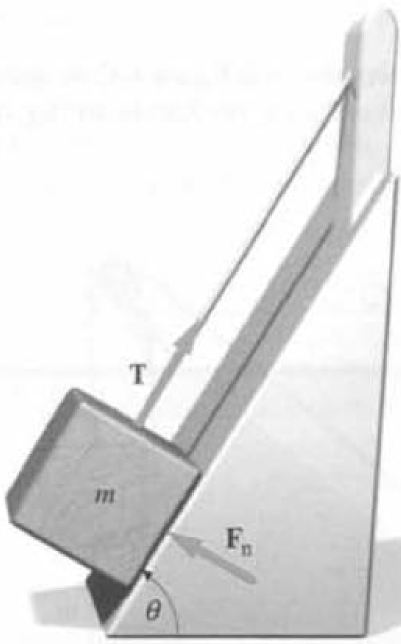


Figura 4.44 Problema 59

77 ●● Dos objetos están conectados por una cuerda de masa despreciable, como se indica en la figura 4.52. El plano inclinado y la polea carecen de rozamiento. Determinar la aceleración de los objetos y la tensión de la cuerda para (*a*) valores generales de θ, m_1 y m_2 y (*b*) $\theta = 30°$ y $m_1 = m_2 = 5$ kg.

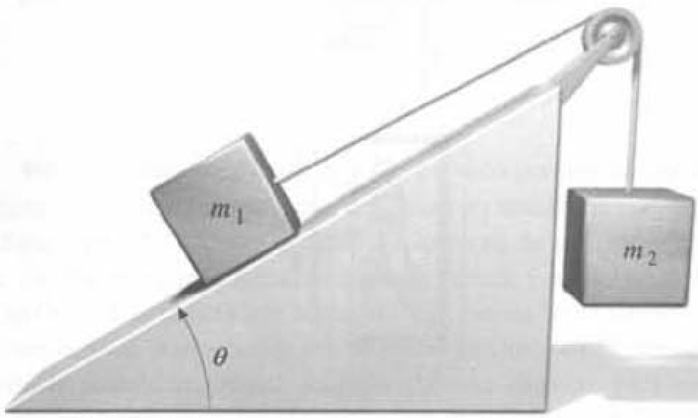


Figura 4.52 Problema 77

84 ●● SSM El aparato de la figura 4.58 se denomina *máquina de Atwood* y se utiliza para medir la aceleración debida a la gravedad g a partir de la aceleración de los dos bloques. Suponiendo que la cuerda y la polea tienen una masa despreciable y la polea carece de rozamiento, demostrar que la aceleración de cualquiera de los bloques y la tensión de la cuerda son

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad \text{y} \qquad T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

Figura 4.58 Problemas 84-87

34 ●● Un bloque en un plano horizontal tiene una velocidad inicial v. Si se mueve en dirección horizontal, recorre una distancia d antes de pararse. Demostrar que el coeficiente de rozamiento cinético viene dado por $\mu_c = v^2/2gd$.

3. Ejercicios varios

3.1. Cinemática

1. ¿Qué distancia recorre un automóvil que viaja a 88 km/h durante el segundo que le lleva al conductor observar un accidente en la carretera? (Res: 24.4 m)

$$88\frac{km}{h}\frac{1h}{3600s}\frac{1000m}{1km}=\frac{220}{9}m/s$$

La distancia recorrida vendrá dada por:

$$x=x_0+v_0t\rightarrow x=\frac{220}{9}\frac{m}{s}\times 1s=\frac{220}{9}m=24.44m$$

2. Dos autos A y B están viajando en la misma dirección y sentido con velocidades v_A y v_B, respectivamente. Cuando el auto A está a una distancia d detrás del auto B, el auto A comienza a frenar siendo su aceleración a. Demostrar que para que ambos autos colisionen es necesario que se verifique $v_A-v_B > (2ad)^{1/2}$

Planteamos las ecuaciones para ambos vehículos:

$$x(t)=x_0+v_0t \qquad \begin{cases} x_A(t)=v_{0A}t \\ x_B(t)=d+v_{0B}t \end{cases}$$

En ese momento, el auto A comienza a frenar:

$$\begin{cases} x_A(t)=v_{0A}t-\frac{1}{2}at^2 \\ x_B(t)=d+v_{0B}t \end{cases}$$

Cuando los vehículos colisionan, $x_A=x_B$

$$v_{0A}t-\frac{1}{2}at^2=d+v_{0B}t$$

$$=\frac{1}{2}at^2-(v_{0A}-v_{0B})t+d=0\rightarrow t=\frac{v_{0A}-v_{0B}\pm\sqrt{(v_{0A}-v_{0B})^2-2ad}}{a}$$

Para que la exista solución, el discriminante debe ser positivo:

$$(v_{0A}-v_{0B})^2-2ad>0\rightarrow \boxed{v_{0A}-v_{0B}>\sqrt{2ad}}$$

3. Un tirador apunta a un blanco que está a una altura h. En el momento en el que el tirador dispara, el blanco se deja caer. Demostrar que independientemente del módulo de la velocidad inicial de la bala, ésta acertará al blanco.

Las ecuaciones de movimiento del proyectil (P), y del blanco (B) son:

$$\begin{cases} x_P(t) = v_{0Px}t \\ v_P(t) = v_{0Px} \\ y_P(t) = v_{0Py}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_{yP}(t) = v_{0Py} - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B(t) = d \\ v_B(t) = 0 \\ y_B(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_{yB}(t) = -gt \end{cases}$$

En el momento en que se encuentran, $x_P = x_B$ *y* $y_P = y_B$*:*

$$\begin{cases} x_P(t_f) = x_B(t_f) \Longrightarrow v_{0Px}t_f = d \\ y_P(t_f) = y_B(t_f) \Longrightarrow v_{0Py}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 = h - \frac{1}{2}gt_f^2 \end{cases}$$

De la primera de las expresiones obtenemos el tiempo que tardan en encontrarse:

$$t_f = \frac{d}{v_{0Px}}$$

Que en la segunda:

$$v_{0Py}\frac{d}{v_{0Px}} = h \qquad [1]$$

Ahora bien, las velocidades inicial y final del proyectil, puesto que apunta inicialmente al objeto, vendrá dado en función de la altura h y de la distancia al objeto d:

$$\left\{ v_{0Px} = v_0 cos\theta = v_0\frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}} \right. \qquad \left\{ v_{0Py} = v_0 sen\theta = v_0\frac{h}{\sqrt{d^2+h^2}} \right.$$

Introduciendo esto en la expresión [1]:

$$v_0\frac{h}{\sqrt{d^2+h^2}}\frac{d}{v_0\frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}} = h \rightarrow 1 = 1$$

Esta ecuación se cumple independientemente de la velocidad inicial.

4. Se lanza verticalmente un objeto hacia arriba de tal forma que tiene una velocidad de 19.6 m/s al llegar a la mitad de la altura máxima. Calcular i) la altura máxima; ii) la velocidad un segundo después de haber sido lanzado; iii) aceleración al alcanzar la altura máxima. (Resp: i)39.2 m; ii)17.9m/s; iii) g)

Las ecuaciones de movimiento del objeto son:

$$\begin{cases} y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = v_0 - gt \end{cases}$$

Sabemos la velocidad que alcanza en la mitad de la altura máxima. Esta altura máxima la podemos determinar haciendo $v = 0$:

$$v(t_{max}) = v_0 - g t_{max} = 0 \rightarrow t_{max} = v_0/g$$

$$y_{max} = y(t_{max}) = v_0 t_{max} - \frac{1}{2} g t_{max}^2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

La mitad de la altura máxima será, pues:

$$y_{1/2} = \frac{v_0^2}{4g}$$

Ahora revertimos el proceso. El tiempo que tarda en alcanzar la mitad de la altura máxima será:

$$y_{1/2} = y(t_{1/2}) = v_0 t_{1/2} - \frac{1}{2} g t_{1/2}^2 = \frac{v_0^2}{4g}$$

Recolocando la expresión:

$$\frac{1}{2} g t_{1/2}^2 - v_0 t_{1/2} + \frac{v_0^2}{4g} = 0 \rightarrow t_{1/2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\left(\frac{1}{2} g\right)\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)}}{g} = \frac{v_0 \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{2}}}{g}$$

Tomando la solución positiva, podemos expresar este tiempo como:

$$t_{1/2} = \frac{1 + \sqrt{1/2}}{g} v_0$$

En ese tiempo llevará la velocidad:

$$v(t_{1/2}) = v_0 - g t_{1/2} = v_0 - g \frac{1 \pm \sqrt{1/2}}{g} v_0 = v_0 - v_0 - \sqrt{1/2} v_0 = -\sqrt{1/2} v_0$$

Que sabemos que vale 19.6 m/s:

$$-\sqrt{1/2} v_0 = -19.6 \rightarrow \boxed{v_0 = 27.71\, m/s}$$

De esta forma podemos responder al resto de apartados:

i) $y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 39.14\ m$

ii) *La velocidad un segundo después de haber sido lanzado:*

$$v(1) = v_0 - g = 27.71 - 9.81 = 17.9\ m/s$$

iii) *La aceleración siempre es la gravedad: g*

5. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial v_0=40m/s formando un ángulo de 30° respecto a un terreno horizontal. Determinar: i) tiempo que tarda en caer a tierra; ii) alcance del proyectil; iii) ángulo que forma con el terreno la dirección del proyectil en el instante en el que alcanza el suelo. (resp: i) 4 s ii) 141.4 m; iii) 30°)

Primero descomponemos la velocidad en sus dos componentes:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 cos\theta \\ v_{0y} = v_0 sen\theta \end{cases}$$

Con la que planteamos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ v_x(t) = v_{0x} \end{cases} \\ \begin{cases} y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_y(t) = v_{0y} + at \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x(t) = v_0 cos\theta\ t \\ v_x(t) = v_0 cos\theta \end{cases} \\ \begin{cases} y(t) = v_0 sen\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y(t) = v_0 sen\theta - gt \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x(t) = 34.64\ t \\ v_x(t) = 34.64 \end{cases} \\ \begin{cases} y(t) = 20t - 4.9t^2 \\ v_y(t) = 20 - 9.8t \end{cases} \end{cases}$$

Con estas últimas ecuaciones, respondemos a las preguntas:

i) *Para calcular el tiempo que tarda en caer, buscamos la situación en que el objeto vuelve al suelo:* $y(t_{caida}) = 0$*:*

$$y(t_{caida}) = 20t_{caida} - 4.9t_{caida}^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_{caida} = 0 \\ t_{caida} = \frac{20}{4.9} = 4.08\ s \end{cases}$$

ii) *Para hallar el alcance del proyectil, usamos el tiempo anterior:*

$$x(t_{caida}) = 34.64\ t_{caida} = 141.39\ m$$

iii) *Para determinar el ángulo que forma cuando alcanza el suelo, hallamos las velocidades en x e y que lleva al llegar al mismo, con el tiempo anterior:*

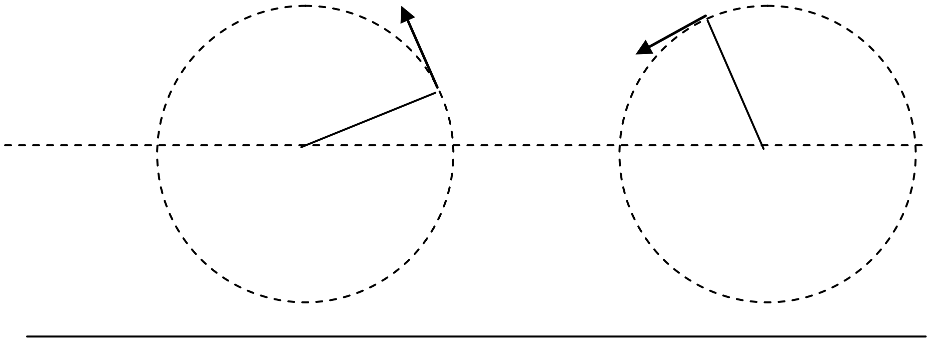
$$\begin{cases} v_x(t_{caida}) = 34.64 \\ v_y(t_{caida}) = 20 - 9.8\ t_{caida} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x(t_{caida}) = 34.64 \\ v_y(t_{caida}) = -20 \end{cases}$$

El ángulo que forma, pues, con la horizontal, será:

$$tg\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{20}{34.64} \rightarrow \theta = 30$$

Que se entiende como 30 grados por debajo de la horizontal (por eso hemos puesto el signo positivo de la velocidad en y). De haber usado el signo negativo, obtendríamos $\theta = -30 = 330$*, que es lo mismo.*

8. Una piedra que está en el extremo de una cuerda se hace girar en un círculo vertical de radio 1.2m a una velocidad de módulo constante de 1.5 m/s. El centro de la cuerda está a 1.5m del suelo. ¿Donde caerá piedra si la soltamos cuando la inclinación de la cuerda es de 30° respecto a la horizontal en el i) 1[er] cuadrante; ii) 2[do] cuadrante; iii) aceleración de la piedra justo antes y justo después de ser soltada en el caso i). (Resp: si el origen del sistema de referencia es (0,0) y el centro de la circunferencia está en (0,1.5m); i) cae en x=0.44 m; ii) x= -1.44 m; iii) a=-1.875 $\mathbf{u_r}$ m/s^2 y a=-9.8 **j** m/s^2)



El esquema muestra la situación en el primer cuadrante (e igual para los demás). Las ecuaciones de movimiento son las de un objeto cayendo en la gravedad:

$$\begin{cases}\begin{cases}x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ v_x(t) = v_{0x}\end{cases} \\ \\ \begin{cases}y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_y(t) = v_{0y} + at\end{cases}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\begin{cases}x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ v_x(t) = v_{0x}\end{cases} \\ \\ \begin{cases}y(t) = y_0 + v_{0y}t - 4.9t^2 \\ v_y(t) = v_{0y} - 9.8t\end{cases}\end{cases}$$

De las que no conocemos la velocidad inicial ni la posición inicial (suponemos el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia para las x y en el suelo para las y).

Sabiendo que la velocidad, en módulo, vale $v = 1.5m/s$, tenemos que:

a) *Si el ángulo es 30 grados (ver el dibujo para ver que el ángulo que forma con la horizontal es de 120):*

$$\begin{cases}x_0 = 1.2cos30 = 1.04\,m \\ y_0 = 1.5 + 1.2sen30 = 2.1\,m\end{cases} \qquad \begin{cases}v_{0x} = 1.5cos120 = -0.75\,m/s \\ v_{0y} = 1.5sen120 = 1.33\,m/s\end{cases}$$

Y las ecuaciones quedan:

$$\begin{cases}\begin{cases}x(t) = 1.04 - 0.75t \\ v_x(t) = -0.75\end{cases} \\ \\ \begin{cases}y(t) = 2.1 + 1.33t - 4.9t^2 \\ v_y(t) = 1.33 - 9.8t\end{cases}\end{cases}$$

Para ver dónde cae la piedra, buscamos el tiempo para el que y=0:

$$y(t_{caida}) = 2.1 + 1.33t_{caida} - 4.9t_{caida}^2 = 0$$

$$t_{caida} = \begin{cases}-0.5329\,s \\ 0.8043\,s\end{cases}$$

Obviamente, el tiempo válido es el segundo. Para él, buscamos la posición:

$$x(t_{caida}) = 1.04 - 0.75t_{caida} = 0.44\,m$$

Es decir, la piedra cae a 0.44 metros delante del centro del círculo.

b) *Si el ángulo es 30 grados en el segundo cuadrante:*

$$\begin{cases} x_0 = -1.2cos60 = -0.6\ m \\ y_0 = 1.5 + 1.2sen60 = 2.54\ m \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{0x} = -1.5cos30 = -1.3\ m/s \\ v_{0y} = -1.5sen30 = -0.75\ m/s \end{cases}$$

Hacemos lo mismo que antes. Las ecuaciones quedan:

$$\begin{cases} \begin{cases} x(t) = -0.6 - 1.3t \\ v_x(t) = -1.3 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} y(t) = 2.54 - 0.75t - 4.9t^2 \\ v_y(t) = -0.75 - 9.8t \end{cases} \end{cases}$$

Para ver dónde cae la piedra, buscamos el tiempo para el que y=0:

$$y(t_{caida}) = 2.54 - 0.75t_{caida} - 4.9t_{caida}^2 = 0$$

$$t_{caida} = \begin{cases} -0.8s \\ 0.65\ s \end{cases}$$

Obviamente, el tiempo válido es el segundo. Para él, buscamos la posición:

$$x(t_{caida}) = -0.6 - 1.3t_{caida} = -1.44\ m$$

Es decir, la piedra cae 1.44 metros detrás del centro del círculo.

c) *Justo antes de ser soltada, la piedra tendrá una aceleración tangencial y una aceleración normal. La aceleración normal será la debida a la velocidad:*

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{1.5^2}{1.2} = 1.875\ m/s^2$$

En la dirección radial. La aceleración tangencial será la debida a la gravedad, 9.8 en dirección hacia abajo. Una vez que la piedra es soltada, tendrá sólo la aceleración tangencial, de valor 9.8, pero ya no tiene aceleración normal, pues ha dejado de girar.

9. Un coche parte del reposo y en una vía circular de 400 m de radio va moviéndose con una aceleración angular constante, de manera que a los 50 s la velocidad alcanzada es de 72 km/h, para posteriormente mantener constante dicha velocidad. Calcular i) la aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento; ii) la aceleración normal (radial), total y la longitud de vía recorrida al cabo de los 50 s. (resp: i) $|\mathbf{a_t}|$=0.4 m/s^2; ii) $|\mathbf{a_r}|$=1 m/s^2; $|\mathbf{a}|$=(1.16)$^{1/2}$ m/s^2,

Primeramente, pasamos las cantidades al SI:

$$72km/h = 20\ m/s$$

Las ecuaciones de movimiento circular son, sabiendo que parte del reposo (y suponiendo que el ángulo inicial es cero):

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega(t) = \alpha t \end{cases}$$

Si a los 50 segundos la velocidad es de 20 m/s, la velocidad angular será:

$$\omega_{50s} = \frac{v_{50s}}{R} \rightarrow \omega_{50s} = \frac{20}{400} = \frac{1}{20}\ rad/s$$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$\omega(50s) = 50\alpha = \frac{1}{20} \rightarrow \alpha = \frac{1}{1000} = 0.001\ rad/s^2$$

i) *Si la aceleración angular es 0.001, la aceleración tangencial será:*

$$a_t = \alpha R \rightarrow a_t = 0.001 \times 400 \rightarrow a_t = 0.4\ m/s^2$$

ii) *Para hallar la aceleración normal, necesitamos la velocidad y el radio:*

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{20^2}{400} = 1\ m/s^2$$

La aceleración total, en módulo, será pues:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{1.16} = 1.077\ m/s^2$$

iii) *El ángulo que recorre en estos 50 segundos será:*

$$\theta(50) = \frac{1}{2}\alpha \times 50^2 = 1.25\ rad$$

Sabiendo el ángulo recorrido, la longitud recorrida será:

$$L = \theta R \rightarrow L_{50s} = 1.25 \times 400 = 500\ m$$

10. Un comprador que está en el departamento de una tienda puede recorrer una escalera mecánica en 30 s. Si la escalera funciona puede llevar al comprador al siguiente piso en 20 s. ¿Cuánto tiempo tardaría el comprador en subir por la escalera con ésta en marcha? (Resp.:12 s)

Supongamos que la longitud de la escalera es L. La velocidad del comprador vendrá dada por:

$$v_c = \frac{L}{t_c} = \frac{L}{30}$$

Mientras que la velocidad de la escalera será:

$$v_e = \frac{L}{t_e} = \frac{L}{20}$$

Si juntamos ambas cosas, la velocidad total será la suma de la de la escalera y la del comprador:

$$v_t = v_e + v_c = \frac{L}{30} + \frac{L}{20} = \frac{2L + 3L}{60} = \frac{5L}{60} = \frac{L}{12}$$

Pero el espacio recorrido será el mismo, por lo que:

$$v_t = \frac{L}{12} = \frac{L}{t_t}$$

De donde inferimos rápidamente que el tiempo total serán 12 segundos.

11. Un globo asciende con una rapidez de 12 m/s hasta una altura de 80 m sobre el suelo y entonces deja caer un paquete. ¿Cuánto tarda en llegar el paquete al suelo? (Resp: 5.4s)

En este problema hay que tener en cuenta que la velocidad inicial del paquete no será cero, pues el globo está subiendo. La velocidad inicial del paquete será la velocidad del globo en el momento de soltarlo. Así pues:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(t) = 80 + 12t - 4.9t^2 \\ v(t) = 12 - 10t \end{cases}$$

Cuando cae al suelo:

$$y(t_{caida}) = 80 + 12t_{caida} - 4.9t_{caida}^2 = 0 \rightarrow t_{caida} = \begin{cases} -2.99\ s \\ 5.45\ s \end{cases}$$

Obviamente, la solución correcta es la segunda, 5.45 segundos.

12. Un avión de reacción vuela con una velocidad respecto al aire de 560km/h entre la ciudad A y la ciudad B, que está situada a 600 km al este de A. Determinar el tiempo total de vuelo desde A hasta B suponiendo que hay viento del oeste con v=60 km/h constante. Calcular el tiempo de vuelo para el viaje de retorno en las mismas condiciones. Si la velocidad del viento aumenta a 90 km/h, evaluar el cambio, en porcentaje, del tiempo de vuelo para el viaje de ida y vuelta (Resp: i) 58min; ii) 72 min.; iii) 1.5%)

Antes de empezar el problema, pasamos al sistema internacional:

$$\begin{cases} 560\ km/h = 155.56\ m/s \\ 600\ km = 6 \times 10^5\ m \\ 60\ km/h = 16.67\ m/s \\ 90\ km/h = 25\ m/s \end{cases}$$

Ahora podemos empezar el problema. Suponiendo que el avión vuela a velocidad constante, el tiempo que tarda en llegar de A a B a la ida es:

$$v = \frac{x}{t} \rightarrow t = \frac{x}{v}$$

i) *Ahora bien, el avión vuela con una velocidad de 155.56 m/s respecto al aire, pero es ayudado por el viento a favor, de 16.67 m/s. Por tanto su velocidad real es de 172.23 m/s. Con esto:*

$$t = \frac{x}{v} = \frac{6 \times 10^5}{172.23} = 3483.7\ s = 58\ min$$

ii) *Para el viaje de retorno, en cambio, el viento hace que su velocidad sea menor. Concretamente:*

$$v_{real} = v_{avion} - v_{viento} = 155.56 - 16.67 = 138.86\, m/s$$

De modo que:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{6 \times 10^5}{138.86} = 4320.9\, s = 72\, min$$

iii) *El tiempo de ida y vuelta con el viento de 16.67 m/s es de 130 min. Si el viento cambia a 25 m/s:*

$$t_{ida} = \frac{x}{v_{ida}} = \frac{6 \times 10^5}{155.56 + 25} = 3323.0\, s = 55.4\, min$$

$$t_{vuelta} = \frac{x}{v_{vuelta}} = \frac{6 \times 10^5}{155.56 - 25} = 4595.6\, s = 76.59\, min$$

El tiempo total será ahora de 132 segundos. La variación relativa será:

$$\frac{t_{total}^{(2)}}{t_{total}^{(1)}} = \frac{132}{130} = 1.015$$

Es decir, un 1.5% mayor en el segundo caso que en el primero.

3.2. Dinámica

2. Una masa puntual de 2 kg describe una curva en el espacio dada por las ecuaciones: $x(t)=t^3$; $y(t)=t-2t^2$; $z(t)=t^4/4$, siendo t el tiempo. Calcular en función del tiempo: i) los vectores velocidad y aceleración; ii) el vector momento lineal;

iv) la fuerza que actúa sobre la masa. (resp: i) $v(t)=(3t^2,1-4t,t^3)$ m/s, $a(t)=(6t,-4,3t^2)$ m/s^2; ii) $p(t)=2(3t^3,1-4t,t^3)$ kgm/s; iii) $L_{eje}= (-4t^3/3+7t^4/3-4t^5/3-t^6/3)$ kgm^2/s; iv) $F(t)=2(6t,-4,3t^2)$ N).

i) *La velocidad es la derivada de la posición en el tiempo, y la aceleración la derivada segunda:*

$$\vec{x}(t) = (t^3, t - 2t^2, t^4/4)$$

$$\vec{v}(t) = (3t^2, 1 - 4t, t^3)$$

$$\vec{a}(t) = (6t, -4, 3t^2)$$

ii) *El momento lineal es $\vec{p} = m\vec{v}$. Con una masa de 2kg:*

$$\vec{p}(t) = (6t^2, 2 - 8t, 2t^3)$$

iii) *La fuerza es $\vec{F} = m\vec{a}$:*

$$\vec{F} = (12t, -8, 6t^2)$$

3. Un cuadro que pesa 8N está soportado por dos cables de tensiones T_1 y T_2 y que forman ángulos de 60º y -30º, respectivamente, con la horizontal. Determinar la tensión de los cables.(Resp: $|T_1|$=6.9 N, $|T_2|$ =4 N)

La segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$$

Por estar el cuadro en equilibrio. Las fuerzas que actúan sobre él son:

$$\vec{F}_g + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

Descomponemos las fuerzas en componentes:

$$\begin{cases} \vec{F}_g = F_g(-\vec{j}) \\ \vec{T}_1 = T_{1x}(\vec{\imath}) + T_{1y}(\vec{j}) = T_1 cos60(\vec{\imath}) + T_1 sen60(\vec{j}) \\ \vec{T}_1 = T_{1x}(\vec{\imath}) + T_{1y}(\vec{j}) = T_2 cos30(-\vec{\imath}) + T_2 sen30(\vec{j}) \end{cases}$$

En la ecuación de Newton, y separado por componentes:

$$\begin{cases} T_1 cos60 - T_2 cos30 = 0 \\ -F_g + T_1 sen60 + T_2 sen30 = 0 \end{cases}$$

De donde podemos despejar:

$$T_1 = \frac{T_2 cos30}{cos60}$$

En la segunda ecuación:

$$-F_g + \frac{T_2 cos30}{cos60} sen60 + T_2 sen30 = 0$$

$$-8 + T_2(tg60cos30 + sen30) = 0 \rightarrow T_2 = \frac{8}{tg60\ cos30 + sen30}$$

$$\boxed{T_2 = 4\ N}$$

$$\boxed{T_1 = 6.93\ N}$$

4. Un globo de masa M desciende con una aceleración a_0 de módulo constante. Determinar la masa de lastre que es necesario tirar por la borda para que el globo ascienda con una aceleración igual a a_0. (resp: $\Delta m = \frac{2ma_0}{g + a_0}$).

La segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

En este caso estamos sólo en una dimensión. Las fuerzas que actúan son la fuerza de la gravedad y el empuje. Recordamos que el empuje viene dado por:

$$E = \rho_{fluido}\, V_{objeto}\, g$$

Antes de soltar lastre, la aceleración es a_0 hacia abajo:

$$E - F_g = -Ma_0$$

$$E - Mg = -Ma_0$$

Si soltamos lastre, el volumen del globo no cambia (aproximadamente), por lo que el empuje es el mismo. Sin embargo, la fuerza de la gravedad es menor:

$$E - M' = M'a_0$$

No tenemos más que resolver este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} E - Mg = -Ma_0 \\ E - M'g = M'a_0 \end{cases} \rightarrow (M - M')g = (M + M')a_0$$

Falta despejar M', la masa que tiene el globo al final:

$$Mg - M'g = Ma_0 + M'a_0$$

$$M(g - a_0) = M'(a_0 + g)$$

$$M' = \frac{g - a_0}{g + a_0} M$$

Si queremos hallar la masa de lastre que queremos dejar caer (lo que pide el problema):

$$\Delta m = M - M' = M - \frac{g - a_0}{g + a_0} M = \frac{g + a_0 - g + a_0}{g + a_0} M$$

$$\boxed{\Delta m = \frac{2a_0}{g + a_0} M}$$

5. Un hombre está de pie sobre una balanza de resorte en un ascensor. ¿Cuál es la lectura de la balanza cuando el ascensor se mueve i)hacia arriba y ii) hacia abajo con una aceleración de módulo a.(resp: INI =mg+ma; ii) INI =mg-ma).

Si el ascensor se mueve hacia arriba con una aceleración a, este ejerce una fuerza ma hacia abajo que se suma a la del peso, de modo que la fuerza normal que hace la báscula para contrarrestarlo será:

$$F_b = mg + ma$$

Si en cambio el ascensor desciende, se produce una fuerza hacia arriba, por lo que la fuerza aparente que hace el hombre es menor de lo que sería en reposo. La báscula marcará entonces:

$$F_b = mg - ma$$

7. Un cuerpo de masa m=0.8kg se encuentra sobre un plano inclinado de θ=30º. ¿Qué fuerza debe aplicarse al cuerpo de modo que se mueva i) hacia abajo; ii) hacia arriba?. Suponer que el movimiento es uniforme y que el coeficiente de rozamiento es 0.3.¿Cual debe ser el coeficiente de rozamiento para que el cuerpo no se mueva bajo la acción de una fuerza de 5N en sentido ascendente (resp: i) F =(-1.88i) N; ii) F=(-6i) N ; iii) μ_{est}>0.16)

i) *Si el objeto se mueve hacia debajo de forma uniforme, significa que no sufre aceleración alguna. Si el objeto se mueve hacia abajo, el rozamiento tendrá la dirección ascendente del plano. Para mantener una velocidad constante, pues, la fuerza que debemos realizar será hacia la dirección ascendente del plano también. Por la segunda ley de Newton:*

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{F_g} = F_{gx}(\vec{\imath}) + F_{gy}(-\vec{\jmath}) = F_g sen\theta\vec{\imath} - F_g cos\theta\vec{\jmath} \\ \vec{N} = N\vec{\jmath} \\ \vec{F}_{roz} = F_{roz}(-\vec{\imath}) \\ \vec{F} = F(-\vec{\imath}) \end{cases}$$

Por componentes:

$$\begin{cases} F_g sen\theta - F_{roz} - F = 0 \\ -F_g cos\theta + N = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, tenemos que $N = F_g cos\theta = mgcos\theta$, que con los datos del problema:

$$N = 0.8 \times 9.81 \times cos30 = 6.8\ N$$

En la primera de las ecuaciones:

$$mgsen\theta - \mu N - F = 0$$

Despejando la fuerza que nos interesa:

$$F = mgsen\theta - \mu N = 0.8 \cdot 9.81 \cdot sen30 - 0.3 \times 6.8$$

$$F = 1.884\ N$$

Vectorialmente:

$$\boxed{\vec{F} = 1.884\ (-\vec{\imath})}$$

ii) *Si queremos que el objeto se mueva hacia arriba con velocidad constante, sólo hay que cambiar la fuerza de rozamiento de signo (si el objeto sube, el rozamiento será en el sentido descendente del plano). En este caso, la fuerza que hay que realizar también será hacia arriba.*

$$\begin{cases} F_g sen\theta + F_{roz} - F = 0 \\ -F_g cos\theta + N = 0 \end{cases}$$

La normal sigue siendo la misma, y por tanto:

$$mgsen\theta + \mu N - F = 0$$

Despejando la fuerza que nos interesa:

$$F = mgsen\theta - \mu N = 0.8 \cdot 9.81 \cdot sen30 + 0.3 \cdot 6.8$$

$$F = 5.964\ N$$

Vectorialmente:

$$\boxed{\vec{F} = 5.964\ (-\vec{\imath})}$$

iii) *Suponemos que el objeto está quieto. El movimiento natural que seguiría el mismo sería hacia el sentido ascendente del plano, por lo que el rozamiento estático es una fuerza que actúa en el sentido descendente. Si la fuerza que ejercemos es en sentido ascendente:*

$$\begin{cases} F_g sen\theta + F_{roz} - F = 0 \\ -F_g cos\theta + N = 0 \end{cases}$$

La normal, una vez más, es la misma que anteriormente, por lo que de la primera ecuación podemos despejar:

$$mgsen\theta + \mu_e N - F = 0 \rightarrow \mu_e = \frac{F - mgsen\theta}{N}$$

De donde el coeficiente de rozamiento es, como mínimo:

$$\mu_e = \frac{5 - 0.8 \cdot 9.81 \cdot sen30}{6.8}$$

$$\boxed{\mu_e > 0.16}$$

8. Se hace girar un cubo de agua siguiendo una circunferencia vertical de radio R. Si la velocidad del cubo en su parte más alta es v_t, calcular i) la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua., ii) Calcular el valor mínimo de v_t para que el agua no se salga del cubo. (resp: $|F| = \frac{mv_t^2}{R} - mg$; $v_{tmin} = \sqrt{gR}$)

La suma de todas las fuerzas debe ser igual a cero, para que el cubo no se mueva de dicha posición. Así pues:

$$\sum F = ma = 0$$

$$-F_g + F_c - F_{cubo} = 0 \rightarrow F_{cubo} = F_c - F_g = m\frac{v_t^2}{R} - mg$$

Para que el agua no se salga del cubo, la fuerza que ejerce el cubo debe ser positiva. En el momento en que vaya demasiado despacio, la fuerza que ejerce el cubo sobre el agua irá *descendiendo hasta que se anule, momento en que la gravedad es más potente que la fuerza centrífuga, y el agua se cae. Así pues:*

$$F_c - F_g > 0 \Rightarrow m\frac{v_t^2}{R} - mg > 0 \Rightarrow \boxed{v_t > \sqrt{Rg}}$$

10. Un cuerpo de masa m=4kg es lanzado verticalmente con una v_o=60 m/s. El cuerpo encuentra una resistencia con el aire de valor constante Fr=3N. Calcular el tiempo que transcurre desde el lanzamiento hasta que alcanza la máxima altura. ¿Qué valor tiene la altura máxima.? (resp: t=5.7 s; ii) hmax=170.8m)

Las ecuaciones de movimiento vienen dadas por:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = 60t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) = 60 + at \end{cases}$$

El problema viene de que ahora a no es $-g$, pues hay un rozamiento. La aceleración vendrá dada por la ley de Newton:

$$\sum F = ma \Rightarrow -F_g - F_{roz} = ma \Rightarrow a = \frac{-mg - F_{roz}}{m} = \frac{-4 \times 9.81 - 3}{4}$$

$$a = -10.56\, m/s^2$$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$\begin{cases} y(t) = 60t - 5.28t^2 \\ v(t) = 60 - 10.56t \end{cases}$$

La altura máxima se alcanza cuando $v(t) = 0$, es decir:

$$t_{max} = \frac{60}{10.56} \Rightarrow \boxed{t_{max} = 5.682\, s}$$

Sustituyendo en la posición:

$$y(t_{max}) = 60t_{max} - 5.28t_{max}^2 \Rightarrow \boxed{y_{max} = 170.45\, m}$$

OJO: si pidiese el tiempo que tarda en caer, habría que hacer el problema en dos partes, puesto que el rozamiento se añade a la gravedad al subir, pero se resta al bajar. Así pues, deberíamos primero calcular el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, y desde ahí volver a empezar el problema. Lo hacemos por completitud:

Una vez hallado el tiempo que tarda en subir y la altura máxima, buscamos la aceleración que tiene al bajar:

$$\sum F = ma \Rightarrow -F_g + F_{roz} = ma \Rightarrow a = \frac{-mg + F_{roz}}{m} = \frac{-4 \times 9.81 + 3}{4}$$

$$a = -9.06\, m/s^2$$

Sustituyendo en las ecuaciones, en las que ahora la altura inicial es la altura máxima de antes, y la velocidad inicial es cero (arriba del todo parte del reposo):

$$\begin{cases} y(t) = 170.45 - 4.53t^2 \\ v(t) = -9.06t \end{cases}$$

Cuando llega al suelo, la altura es cero:

$$y(t_{caida}) = 0 = 170.45 - 4.53t_{caida}^2 \Rightarrow t_{caida} = \sqrt{\frac{170.45}{4.53}} \Rightarrow \boxed{t_{max} = 6.134\ s}$$

De forma que el tiempo total será:

$$t_{total} = t_{subida} + t_{bajada} = 5.682 + 6.134 \Rightarrow \boxed{t_{total} = 11.816\ s}$$

Supongamos por último que hubiésemos hecho el problema sin rozamiento. En este caso las ecuaciones de movimiento serían con la g habitual, y para hallar el tiempo que tarda en caer al suelo, no habría más que imponer que la altura en ese momento es cero:

$$y(t_{caida}) = 60t_{caida} - \frac{1}{2}gt_{caida}^2 = 0 \Rightarrow t_{caida} = \frac{60}{4.9} \Rightarrow \boxed{t_{caida} = 3.5\ s}$$

Puede verse claramente la gran diferencia entre un caso y otro (motivado también por los $60\ m/s = 216\ km/h$ *con los que se ha lanzado el objeto inicialmente).*

11. El conductor de un automóvil empieza a frenar a 25 m de distancia de un obstáculo que hay en la carretera. La fuerza de rozamiento que ejercen las zapatas de los frenos es constante e igual a 3840N. La masa del coche es una tonelada. ¿Cuál es la velocidad máxima que puede llevar en el momento de accionar los frenos para no chocar con el obstáculo? (resp: v=13.85 m/s ≈ 50 km/h)

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases}$$

Para calcular la aceleración: Ley de Newton:

$$\sum F = -F_{roz} = ma \Rightarrow a = -\frac{F_{roz}}{m} = -\frac{3840}{1000} \Rightarrow a = -3.84\ m/s^2$$

$$\begin{cases} x(t) = -25 + v_0 t - 1.92t^2 \\ v(t) = v_0 - 3.84t \end{cases}$$

Para que frene al llegar al obstáculo, se debe cumplir que $x(t_{final}) = 0$ *y que* $v(t_{final}) = 0$ *simultáneamente, de modo que:*

$$\begin{cases} x(t_{final}) = -25 + v_0 t_{final} - 1.92t_{final}^2 = 0 \\ v(t_{final}) = v_0 - 3.84t_{final} \end{cases}$$

De la segunda de ellas:

$$t_{final} = v_0/3.84$$

Sustituyendo en la primera:

$$-25 + v_0\left(\frac{v_0}{3.84}\right) - 1.92\left(\frac{v_0}{3.84}\right)^2 = 0$$

Operando:

$$-25 + 0.2604v_0^2 - 0.1302v_0^2 = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{25}{0.2604 - 0.1302}}$$

Es decir:

$$\boxed{v_0 = 13.856\ m/s}$$

12. Un cuerpo de masa 5 kg está atado a un hilo de 1 m de longitud, que está sujeto al vértice de un cono de ángulo 45º. El cuerpo se encuentra girando sobre la superficie lisa del cono alrededor del eje de simetría del cono con una velocidad angular de 20 rev/min. Calcular i) la velocidad lineal del cuerpo, ii) la reacción de la superficie sobre el cuerpo y la tensión del hilo; iii) ¿Cuál es la máxima velocidad angular con la que puede girar la masa sin separarse de la superficie cónica? (resp: i) |v|=1.48 m/s; ii) |N|=23.7 N, |T|=45.6N; iii) ω_{max}=3.7 rad/s).

Para empezar, pasamos la velocidad angular a SI:

$$20\frac{rev}{min} \times \frac{2\pi\ rad}{1rev} \times \frac{1\ min}{60\ s} = 2.09\ rad/s$$

Construimos un esquema del cono, con las fuerzas que actúan sobre él, los ángulos, etc.

i) *Si el hilo es de un metro, y el cono es de 45 grados, el radio de giro (trigonometría) que seguirá el cuerpo será:*

$$sen45 = \frac{R}{1m} \Rightarrow R = 0.707\ m$$

De esta forma, la velocidad lineal será:

$$v = \omega R \Rightarrow \boxed{v = 1.478\ m/s}$$

ii) *La segunda ley de Newton dice:*

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$$

Puesto que el objeto no es acelerado en ninguna dirección. Descomponiendo en sus componentes:

$$\begin{cases} N - F_g sen\theta + F_c sen\theta = 0 \\ T - F_g cos\theta - F_c cos\theta = 0 \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} N = mgsen\theta - m\dfrac{v^2}{R}sen\theta \\ T = mgcos\theta + m\dfrac{v^2}{R}cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 5 \times 9.81 \times sen45 - 5 \times \dfrac{1.478^2}{0.707}sen45 \\ T = 5 \times 9.81 \times cos45 - 5\dfrac{1.478^2}{0.707}cos45 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} N = 23.765\ N \\ T = 45.602\ N \end{cases}}$$

iii) *La velocidad máxima (lineal) con que puede girar sin despegarse será para aquella para la que la normal sea cero. En ese momento, tomando la primera de las ecuaciones del apartado anterior:*

$$N = mgsen\theta - m\frac{v^2}{R}sen\theta = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gRsen\theta}{cos\theta}} = \sqrt{\frac{gRsen45}{cos45}} = \sqrt{gR}$$

$$v_{max} = 2.634\ m/s$$

Y la velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \boxed{\omega_{max} = 3.725\ rad/s}$$

13. Sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal se colocan 2 masas en contacto. Sus masa son iguales y los coeficientes de rozamiento entre las masas y la superficie son μ_1 y μ_2, donde $\mu_1 > \mu_2$. Determinar la fuerza de reacción entre las dos masas durante el movimiento (se supone que están en contacto y que la masa 1 es la más próxima a la horizontal) (Resp. $|F_{12}| = \frac{(\mu_1 - \mu_2)mg\cos\alpha}{2}$).

Antes de nada, hacemos un esquema de la situación. A partir de ahí, estudiamos el problema por separado. Si el coeficiente de rozamiento de la masa 1 es mayor que el de la masa 2, y la masa 1 es la más próxima a la horizontal, esto significa que la masa 2 "empuja" a la masa 1, que está más abajo. A su vez, se ejerce una fuerza de "resistencia" de la masa 1 sobre la masa 2 (una especie de normal). Las leyes de Newton para cada una de ellas serán:

$$\sum \vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 \qquad \sum \vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{F}_{g\,1} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{roz\,1} + \vec{F}_{res\,1} = m_1\vec{a}_1 \qquad \vec{F}_{g\,2} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{roz\,2} + \vec{F}_{res\,12} = m_2\vec{a}_2$$

Ahora bien, las fuerzas de resistencia son iguales en módulo, si bien la que sufre la masa 1 está dirigida en el sentido descendente del plano (es empujada), y la que sufre 2 está dirigida hacia arriba (es frenada). Pero además, la aceleración es la misma para las dos (llamémosla simplemente a):

$$\begin{cases} F_{g_1}sen\theta(\vec{\imath}) + F_{g_1}cos\theta(-\vec{\jmath}) + N_1(\vec{\jmath}) + F_{roz\,1}(-\vec{\imath}) + F_{res}(\vec{\imath}) = m_1a(\vec{\imath}) \\ F_{g_2}sen\theta(\vec{\imath}) + F_{g_2}cos\theta(-\vec{\jmath}) + N_2(\vec{\jmath}) + F_{roz\,2}(-\vec{\imath}) + F_{res}(-\vec{\imath}) = m_2a(\vec{\imath}) \end{cases}$$

Separando en componentes:

$$\begin{cases} \begin{cases} F_{g\,1}sen\theta - F_{roz_1} + F_{res} = m_1a \\ -F_{g\,1}cos\theta + N_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} F_{g_2}sen\theta - F_{roz_2} - F_{res} = m_2a \\ -F_{g\,2}cos\theta + N_2 = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} m_1gsen\theta - \mu_1N_1 + F_{res} = m_1a \\ -m_1gcos\theta + N_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m_2gsen\theta - \mu_2N_2 - F_{res} = m_2a \\ -m_2gcos\theta + N_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Quitemos primero las normales de las segundas ecuaciones, introduciéndolas en las primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} N_1 = m_1 g cos\theta \\ \{N_2 = m_2 g cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 g sen\theta - \mu_1 m_1 g cos\theta + F_{res} = m_1 a \\ m_2 g sen\theta - \mu_2 m_2 g cos\theta - F_{res} = m_2 a \end{cases}$$

Lo que tenemos finalmente es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (la aceleración a y la fuerza de resistencia F_{res}). Multiplicando la primera por m_2 y la segunda por m_1 y restando eliminamos la aceleración:

$$\underline{\begin{cases} m_1 m_2 g sen\theta - \mu_1 m_1 m_2 g cos\theta + m_2 F_{res} = m_1 m_2 a \\ m_1 m_2 g sen\theta - \mu_2 m_1 m_2 g cos\theta - m_1 F_{res} = m_1 m_2 a \end{cases}}$$
$$(\mu_2 - \mu_1) m_1 m_2 g cos\theta + (m_2 + m_1) F_{res} = 0$$

Despejando de esta última ecuación obtenemos el resultado buscado:

$$F_{res} = \frac{(\mu_1 - \mu_2) m_1 m_2 g cos\theta}{m_2 + m_1}$$

Ahora bien, falta por utilizar el dato de que las dos masas son iguales. En ese caso:

$$F_{res} = \frac{(\mu_1 - \mu_2) m^2 g cos\theta}{2m}$$

Que reduciendo, llegamos a la expresión buscada:

$$\boxed{F_{res} = \frac{(\mu_1 - \mu_2) m g cos\theta}{2}}$$

14. Una pista de carreras de forma circular y radio R no tiene peralte. El coeficiente de rozamiento entre un móvil y la superficie vale μ. Encontrar la velocidad máxima a la que se podrá circular en la pista. (Resp: vmax = $\sqrt{\mu g R}$)

La ley de Newton, aplicada sobre el eje radial, indica que la fuerza de rozamiento y la fuerza centrífuga se deben igualar para que el coche no salga de la superficie (en realidad, el rozamiento debe ser mayor. El caso límite es cuando sean iguales. A partir de ese momento, el coche sale de la pista):

$$F_{roz} = F_c \Rightarrow \mu N = m \frac{v^2}{R}$$

Como está en horizontal (sin peralte), la normal será igual al peso:

$$N = F_g = mg$$

Igualando todo:

$$\mu m g = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{v_{max} = \sqrt{\mu g R}}$$

4. Apéndice I: Las ecuaciones de movimiento

Hasta ahora hemos trabajado con las ecuaciones de movimiento de una partícula con aceleración constante:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) = v_0 + at \end{cases}$$

La pregunta que nos hacemos en este apartado es ¿de dónde salen estas ecuaciones? El principio básico desde donde vamos a partir es que la **aceleración es constante**. Sabiendo esto, y que la aceleración es la derivada de la velocidad en el tiempo:

$$a = \frac{dv(t)}{dt}$$

La pregunta que se nos plantea ahora es ¿qué función, al derivarla, nos da una constante? La respuesta es la ecuación de una recta (una ecuación lineal), de la forma:

$$v(t) = A + Bt \qquad [4.1]$$

Que al derivarla, se tiene:

$$\frac{dv(t)}{dt} = B$$

Pero eso debe ser la aceleración a, por tanto, ya tenemos que $\boxed{B = a}$. Por otra parte, llamaremos v_0 a la velocidad de la partícula cuando el tiempo $t = 0$. En la ecuación [4.1]:

$$v(0) = A$$

Pero hemos dicho que llamaremos v_0 a la velocidad en ese momento de tiempo, por lo que ya tenemos que $\boxed{A = v_0}$. La ecuación final es, por tanto:

$$\boxed{v(t) = v_0 + at} \qquad [4.2]$$

Pasemos ahora a la posición. Sabemos que la velocidad es la derivada de la posición, $s(t)$, en el tiempo:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Por tanto, ¿qué función, al derivarla, hace que obtengamos una expresión $v(t) = A + Bt$?. La respuesta es clara: una función cuadrática:

$$s(t) = A + Bt + Ct^2 \qquad [4.3]$$

Ahora bien, al derivarla, tenemos que:

$$v(t) = B + 2Ct$$

Pero eso debe ser igual a la ecuación [4.2], luego:

$$v(t) = B + 2Ct = v_0 + at \Rightarrow \begin{cases} B = v_0 \\ 2C = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = v_0 \\ C = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

Ya tenemos, pues, que la ecuación de la posición viene dada por:

$$s(t) = A + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad [4.4]$$

Ahora, llamemos s_0 a la posición del objeto cuando $t = 0$, es decir, $s(0)$. En la ecuación [4.4] tenemos que: $s(0) = A = s_0$. Tenemos ya, por tanto, la ecuación completa:

$$\boxed{s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2} \qquad [4.5]$$

Obviamente, al derivar esta expresión, se obtiene la de la velocidad. Al derivarla por segunda vez, se obtiene $a(t) = a$, como se esperaba.

Este razonamiento sirve para problemas más complicados. En la vida real, al dejar caer un objeto desde una altura, la aceleración no siempre es constante e igual a $-g$, sino que el rozamiento del aire "frena" el objeto. Pero no lo frena siempre igual: cuanta más velocidad tenga el objeto, más se frena (cuando está quieto no hay rozamiento). Puede demostrarse (aunque no se hará aquí), que la aceleración en caída libre es realmente una expresión del tipo:

$$a(t) = \alpha e^{-\beta t}$$

Donde α y β son parámetros que pueden determinarse. Por ejemplo, cuando el tiempo es cero (se suelta el objeto), la velocidad inicial es cero y la aceleración sería la de la gravedad. Por tanto, se tiene que $a(0) = \alpha(e^{-0}) = \alpha = -g$, de donde $\alpha = -g$. El parámetro β podría obtenerse de forma similar. La pregunta que nos hacemos ahora es cuál es la velocidad en este caso. Hay que buscar una función que al derivarla nos de esta aceleración. Del mismo modo para la posición. Puede demostrarse que las siguientes funciones cumplen los requisitos. A la derecha está la imposición de que $s(0) = s_0$ y $v(0) = v_0$, que también puede comprobarse:

$$\begin{cases} s(t) = \dfrac{\alpha}{\beta^2}e^{-\beta t} + Ct + D \\ v(t) = -\dfrac{\alpha}{\beta}e^{-\beta t} + C \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0 t + \dfrac{\alpha}{\beta}\left(t + \dfrac{1}{\beta}e^{-\beta t}\right) \\ v(t) = v_0 + \dfrac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) \end{cases}}$$

Estas son las ecuaciones que verdaderamente deberíamos utilizar para los movimientos, por ejemplo, de caída libre. Nótese que, con el mismo argumento, en el eje x también habría aceleración. No la expuesta anteriormente, sino una parte proporcional correspondiente al rozamiento del aire.

Con las ecuaciones anteriores, ¿sabrías determinar lo que se llama **velocidad terminal** de un objeto? (La velocidad terminal es la velocidad que lleva un objeto cuando ha pasado mucho tiempo cayendo, que acaba siendo constante).